Notas em Análise Complexa

Gabriel E. Pires

1998

Conteúdo

1 Integração **5**
1.1 Teorema de Cauchy 9
1.2 Consequências do Teorema de Cauchy 14
1.3 Índice de um Caminho Fechado 14
1.4 Fórmulas Integrais de Cauchy 17
1.5 Teorema de Morera 19
1.6 Teorema de Liouville 19
1.7 Teorema Fundamental da Álgebra 20
1.8 Zeros de Funções Analíticas 20
1.9 Teorema do Módulo Máximo 21
1.10 Exercícios 23

2 Singularidades **25**
2.1 Classificação 25
2.2 Série de Laurent 27
2.3 Exercícios 35

3 Resíduos e Aplicações **37**
3.1 Teorema dos Resíduos 37
3.2 Zeros e Polos 38
3.3 Cálculo de Resíduos 40
3.4 Cálculo de Integrais e de Séries 42
3.5 Exercícios 60

Capítulo 1

Integração

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho seccionalmente regular (cf. [5],[2],[6]). Seja γ^* a imagem do caminho γ, $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto tal que $\gamma^* \subset S$ e seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Então as funções $\mathrm{Re}(f \circ \gamma)\gamma'$ e $\mathrm{Im}(f \circ \gamma)\gamma'$ serão seccionalmente contínuas no intervalo $[a, b]$ e, portanto, integráveis em $[a, b]$. Assim, define-se integral de f ao longo do caminho γ da forma seguinte:

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\big[f(\gamma(t))\gamma'(t)\big]dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\big[f(\gamma(t))\gamma'(t)\big]dt \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

Lema 1.0.0.1 *Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho seccionalmente regular e $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ uma função contínua.*

1. $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.

2. *Seja $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ uma função de classe C^1 com derivada positiva e seja $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ uma reparametrização. Então,* $\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$.

3. *Para $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ tem-se,* $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

Dem.:

1. Basta ter em conta o facto de que (ver figura 1.0.1)

$$-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$$
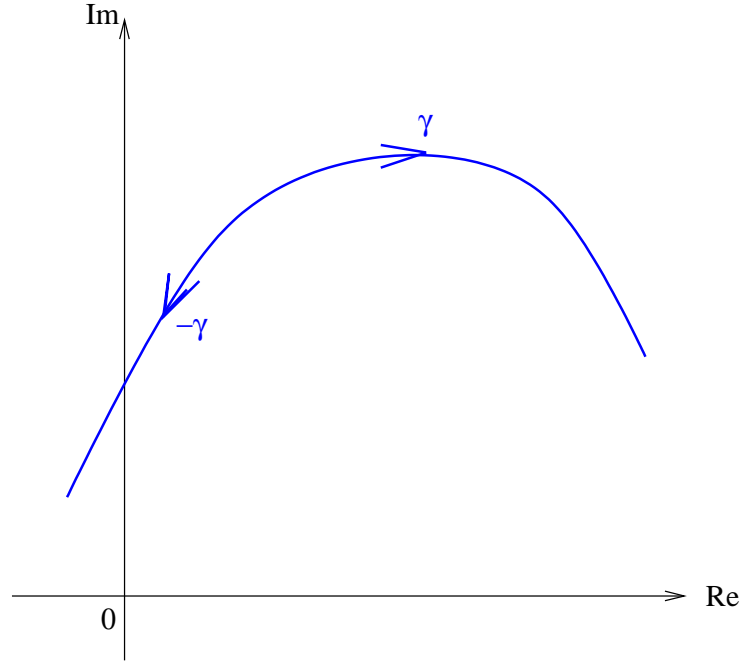
Figura 1.0.1: Mudança de sentido num caminho

2. Efectuando a mudança de variável $t = \psi(s)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\psi(s)))\gamma'(\psi(s))\psi'(s)ds \\ &= \int_\alpha^\beta f(\tilde{\gamma}(s))\tilde{\gamma}'(s)ds \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz\end{aligned}$$

3. Por reparametrizaçao, podemos considerar γ_1 e γ_2 definidos no intervalo $[0,1]$ e, portanto, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, também designado por concatenação de γ_1 e de $\gamma 2$, (ver figura 1.0.2), é dado por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

donde se obtém,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(\gamma_1(2t))\gamma_1'(2t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\gamma_2(2t-1))\gamma_2'(2t-1)dt \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz\end{aligned}$$
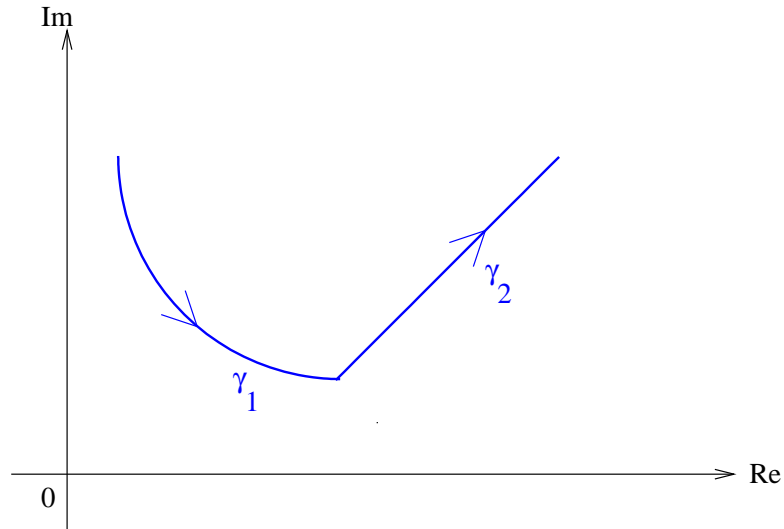
Figura 1.0.2: Concatenção de dois caminhos

□

Exemplo:

- Seja $r > 0$ e $\gamma(t) = re^{it}$, $(t \in [0, 2\pi])$ a parametrização de uma circunferência de raio r, centrada na origem e percorrida no sentido directo como mostra a Figura 1.0.3.

  Então,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt \\
&= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\
&= ir^{n+1} \left[\int_0^{2\pi} \cos(n+1)t\, dt + i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(n+1)t\, dt \right] \\
&= \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.0.2}$$

Teorema 1.0.1 *Seja γ um caminho seccionalmente regular, $S \subset \mathbb{C}$ um aberto tal que $\gamma^* \subset S$ e $F : S \to \mathbb{C}$ uma função de classe C^1. Então,*

$$\int_\gamma F'(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$
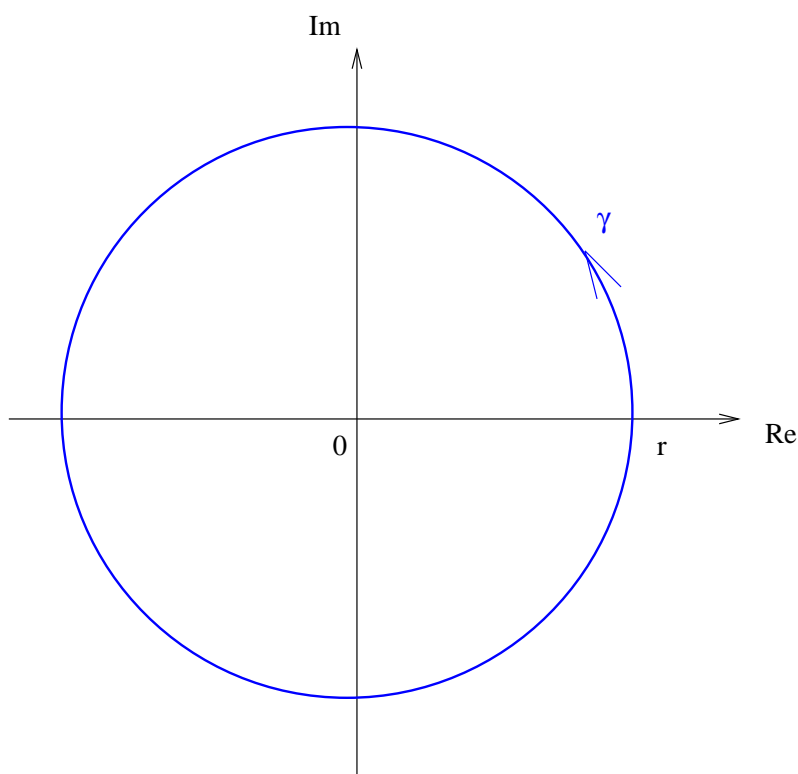
Figura 1.0.3: Circunferência de raio r e centro na origem

Dem.: (cf. [5]) Consideremos apenas o caso em que γ é regular. Para o caso em que γ é seccionalmente regular basta ter em conta a propriedade 3. do Lema 1.0.0.1.

$$\begin{aligned}\int_\gamma F'(z)dz &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b (F\circ\gamma)'dt \\ &= [\mathrm{Re}(F\circ\gamma)(t)]_a^b + i[\mathrm{Im}(F\circ\gamma)(t)]_a^b \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\end{aligned}$$

□

Este é o chamado Teorema Fundamental do Cálculo. A sua aplicação exige o conhecimento da primitiva da função a integrar o que, em muitos casos, não é simples. No entanto, temos a seguinte estimativa para o módulo do integral de uma função contínua:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = Ml(\gamma) \tag{1.0.3}$$

em que M é o máximo da função $|f|$ em γ^* e $l(\gamma)$ é o comprimento da linha parametrizada por γ.

De facto, sendo $\int_\gamma f(z)dz = re^{i\theta}$ a representação polar do integral de f ao longo de γ, obtemos,

$$\begin{aligned}
r = e^{-i\theta}\int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma e^{-i\theta} f(z)dz \\
&= \int_a^b \{\mathrm{Re}[e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)] + i\,\mathrm{Im}[e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)]\}dt \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}[e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt \\
&\leq \int_a^b |\,\mathrm{Re}[e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)]|dt \\
&\leq \int_a^b |e^{-i\theta}||f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \\
&= \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \\
&= \int_\gamma |f(z)|dz \leq Ml(\gamma)
\end{aligned}$$

Exemplos:

- Seja $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ e $\gamma(t) = Re^{it}$, $(0 \leq t \leq \pi)$. Então,

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| \leq \int_0^\pi \Big|\frac{Rie^{it}}{R^4e^{i4t}+1}\Big|dt \leq \frac{R\pi}{|R^4-1|}$$

- $f(z) = \frac{1}{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Então, $|f(\gamma(t))| = 1$ e $|\gamma(t)| = 1$ e, portanto,

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq 2\pi$$

1.1 Teorema de Cauchy

O teorema de Cauchy é um dos resultados fundamentais na teoria das funções analíticas e pode ser apresentado sob diversas formas (cf. [6, 1, 2, 5]). Nesta secção estudaremos uma de tais versões que é suficiente para grande parte das aplicações.

Seja $\Delta \subset \mathbb{C}$ um triângulo com vértices $\{a, b, c\}$. Dada um função contínua na fronteira do triângulo $\partial\Delta$, pela propriedade 3. do Lema 1.0.0.1, obtemos

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{[a,b]} f(z)dz + \int_{[b,c]} f(z)dz + \int_{[c,a]} f(z)dz$$

em que $[x, y]$ designa o segmento de recta percorrido de x para y.

Lema 1.1.0.1 *Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $\Delta \subset S$ um triângulo fechado e f uma função analítica em S. Então,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

Dem.: (cf. [5, 6]) Sejam a, b, c os vértices de Δ e sejam a', b', c' os pontos médios dos segmentos $[b, c]$, $[c, a]$ $[a, b]$, respectivamente, como mostra a Figura 1.1.4. Consideremos os quatro triângulos Δ_j, $j = 1, 2, 3, 4$ cujos vértices são, respectivamente,

$$\{a, c', b'\}, \ \{b, a', c'\}, \ \{c', b', a'\}, \ \{a', b', c'\}$$
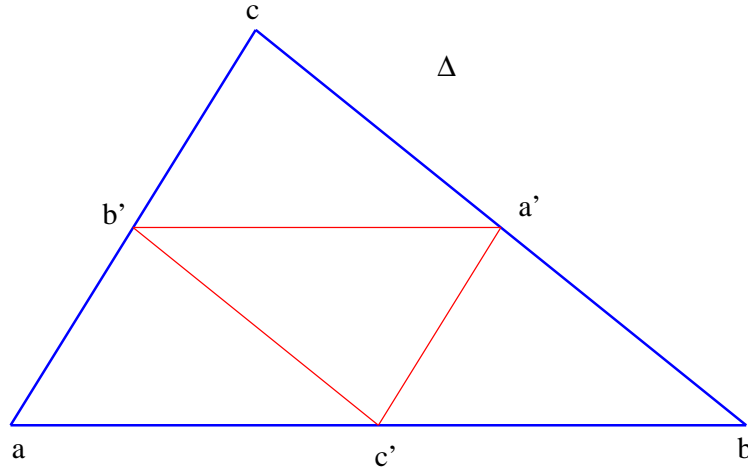
Figura 1.1.4: Subdivisão em triângulos encaixados

Pelas propriedades 1., 2. e 3. do Lema 1.0.0.1, temos,

$$I = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} I_j$$

em que $I_j = \displaystyle\int_{\partial\Delta_j} f(z)dz$

O módulo de pelo menos um dos números I_j deve ser maior ou igual a $\frac{|I|}{4}$. Seja I_1 esse número. Repetindo este procedimento com Δ_1 em substituição de Δ, obtemos uma sucessão de triângulos (Δ_n) , encaixados da seguinte forma:

$$\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \cdots$$

O comprimento da fronteira de cada um dos triângulos $\partial\Delta_n$ é igual a $\frac{L}{2^n}$, em que L é o comprimento de $\partial\Delta$. Portanto,

$$|I| \leq 4^n \Big| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \Big| , \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Dado que Δ é um conjunto compacto, existe um ponto $z_0 \in \Delta$ que é comum a todos os triângulos Δ_n. Sendo f diferenciável em S, é diferenciável em z_0.

Seja $\epsilon > 0$. Então, existe $r > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \epsilon |z - z_0|$$

para $|z - z_0| < r$.

Tendo em conta que os triângulos estão encaixados, existe n tal que se $z \in \Delta_n$ então $|z - z_0| < r$.

Note-se que, pelo teorema 1.0.1, se tem

$$\int_{\partial\Delta} z^n dz = 0 , \qquad (n \neq -1)$$

Portanto, temos

$$\Big| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \Big| = \Big| \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz \Big| \leq \epsilon (2^{-n}L)^2$$

o que implica que $|I| \leq \epsilon L^2$. Dado que ϵ é arbitrário, $I = 0$. $\square$

Este Lema coloca imediatamente a questão de saber em que conjuntos abertos $S \subset \mathbb{C}$ se verifica a seguinte propriedade: Dados três pontos $a, b, c \in S$, o triângulo fechado Δ de vértices a, b, c está contido em S. Uma classe de conjuntos em que tal se verifica é a dos convexos. Veremos, de seguida, que para esta classe de conjuntos é possível definir primitiva de uma função analítica.

Teorema 1.1.1 *Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e convexo, f uma função analítica em S. Então, existe uma função F analítica em S tal que $f = F'$.*

Dem.: Seja $a \in S$. Sendo S convexo, o segmento $[a, z]$ está contido em S para todo $z \in S$. Portanto, podemos definir,

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)dw , \qquad (z \in S)$$

Dados z e z_0 em S, o triângulo com vértices $\{a, z_0, z\}$ está contido em S. Então

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw$$

donde obtemos

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0}\int_{[z-z_0]} [f(w) - f(z_0)]dw \qquad (1.1.1)$$

para $z \neq z_0$.

Sendo f contínua em z_0, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|z - z_0| < \delta$ então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Portanto, de (1.1.1) obtemos,

$$\Big|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\Big| < \epsilon$$

ou seja, $f = F'$ e, em particular, F é analítica. $\square$

Outra classe de subconjuntos de $\mathbb{C}$ em que é possível definir primitiva de uma função analítica é a dos conjuntos em forma de estrela.

Diz-se que um conjunto $S \subset \mathbb{C}$ é uma **estrela** se existe um ponto $a \in S$ tal que $[a, z] \subset S$ para qualquer $z \in S$ (cf. [5]).
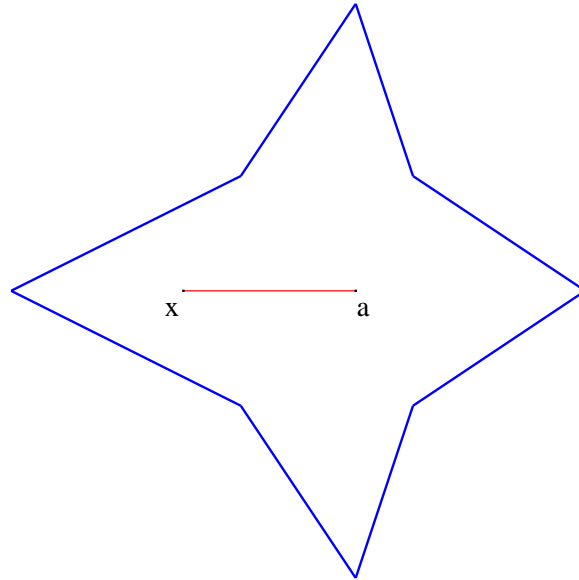
Figura 1.1.5: Conjunto em forma de estrela

Note-se que qualquer conjunto convexo é uma estrela. Tome-se para ponto a qualquer ponto de S.

Um corte do plano complexo dado por

$$\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} : \arg(w) = \alpha\}$$

é uma estrela. Tome-se para ponto a qualquer ponto de $\mathbb{C}_\alpha$ sobre o segmento de recta $\{w \in \mathbb{C}_\alpha : \arg(w) = \alpha + \pi\}$.

A demonstração do teorema 1.1.1 é facilmente adaptável a esta classe de conjuntos. De facto, dados dois pontos z_1 e z_2 em S, se o segmento de recta $[z_1, z_2] \subset S$ então cada um dos segmentos de recta $[a, z]$ com $z \in [z_1, z_2]$ estará contido em S e, portanto, o triângulo fechado de vértices $\{a, z_1, z_2\}$ estará igualmente contido em S.

Do teorema 1.1.1 e do teorema fundamental do cálculo obtemos imediatamente o teorema de Cauchy:

Teorema 1.1.2 *Seja f uma função analítica, definida num aberto e em estrela S, e $\gamma^* \subset S$ um caminho fechado. Então*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

□

Note-se que a aplicação do teorema fundamental do cálculo exige o conhecimento da primitiva da função a integrar o que, na práctica, poderá tornar-se uma dificuldade incontornável. Pense-se, por exemplo, na função $\exp(-z^2)$. O teorema anterior resolve, para caminhos fechados, este problema.

Exemplos: Seja $\gamma(t) = e^{it}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Então, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cada uma das funções abaixo indicadas:

- Para $f(z) = \frac{1}{z^2}$, veja-se o primeiro exemplo de cálculo de integrais.
- Para $f(z) = \text{cosec}^2(z) = \frac{d}{dz}\cot(z)$, use-se o teorema fundamental do cálculo.
- Para $f(z) = \frac{e^{iz^2}}{4+z^2}$, aplique-se o teorema de Cauchy.
- Para $f(z) = (\text{Im}\, z)^2$, temos, por definição de integral:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} \text{sen}(2t) i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2\cos(t)\,\text{sen}^2(t)dt + 2i\int_0^{2\pi} \text{sen}(t)\cos^2(t)dt = 0\end{aligned}$$

  Note-se que esta função não é diferenciável.

- (Exercício:) $f(z) = \frac{1}{2z-1} - \frac{1}{2z+1}$.

1.2 Consequências do Teorema de Cauchy

1.3 Índice de um Caminho Fechado

Seja γ um caminho fechado e designemos por S o complementar de γ^*. Seja $z \in S$ e consideremos o integral

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}\,, \qquad (z \in S)$$
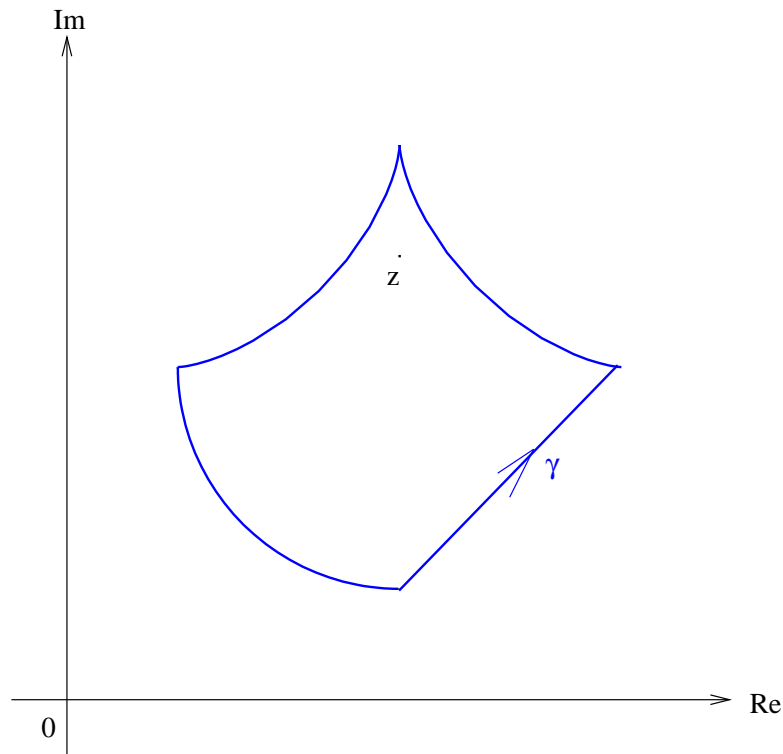
Figura 1.3.6: Índice de um caminho no ponto z

Seja

$$\phi(t) = \exp\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}ds\,, \qquad (a \le t \le b)$$

Derivando ϕ obtemos,

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$$

excepto, possivelmente, num conjunto finito D em que γ não é diferenciável. Assim, a função $\frac{\phi}{\gamma-z}$ é contínua em $[a,b]$ e tem derivada nula em $[a,b]\setminus D$. De facto,

$$\frac{d}{dt}\frac{\phi(t)}{\gamma(t)-z} = \frac{\phi'(t)(\gamma(t)-z)-\phi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2} = 0$$

Sendo D finito, $\frac{\phi}{\gamma - z}$ é constante em $[a,b]$ e, como $\phi(a) = 1$, temos

$$\phi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z}, \qquad (a \leq t \leq b)$$

Dado que γ é um caminho fechado, ou seja, $\gamma(a) = \gamma(b)$, fica claro que $\phi(b) = 1$. Por outro lado, $\phi(b) = \exp(2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(z))$. Portanto, $\phi(b) = 1$ se e só se $\exp(2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(z)) = 1$. Sendo a exponencial complexa uma função periódica de períodos $2k\pi i$, em que $k \in \mathbb{Z}$, concluimos que a função $\operatorname{Ind}_\gamma$ toma valores inteiros em S.

Veremos de seguida que a função $\operatorname{Ind}_\gamma$ pode ser representada por uma série de potências, ou seja, trata-se de uma função analítica em S.

Seja $a \in S$. Sendo S um conjunto aberto, existe um disco $D_r(a) \subset S$. Dado que S é o complementar de γ^*, tem-se: $|w - a| > r$ para todo $z \in D_r(a)$ e, portanto,

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| \leq \frac{|z-a|}{r} < 1$$

Dado que

$$\frac{w-a}{w-z} = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}}$$

podemos expressar $\frac{1}{w-z}$ em termos de uma série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} = \frac{1}{w-z}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_\gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw \end{aligned}$$

Se fôr possível trocar a série com o integral na expressão anterior, concluimos que a função $\operatorname{Ind}_\gamma$ pode ser expressa na forma de uma série de potências:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad (z \in D_r(a))$$

em que os coeficientes c_n são dados por

$$c_n = \int_\gamma \frac{1}{(w-a)^{n+1}} dw, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Portanto, a função $\operatorname{Ind}_\gamma$ é analítica em S.

A possibilidade de troca da série com o integral fica estabelecida no Lema seguinte ([5]):

Lema 1.3.0.1 *Seja γ um caminho, $\big(f_k\big)$ uma sucessão de funções contínuas em γ^* tais que, para todo $z \in \gamma^*$, a série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ converge. Suponhamos que existem constantes M_k tais que a série $\sum M_k$ converge e, para todo $z \in \gamma^*$, se tem: $|f_k(z)| \leq M_k$. Então*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma f_k(z)dz = \int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)dz$$

Dem.: Seja $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ e $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$. Por serem contínuas, F e F_n são integráveis em γ^* e, por comparação, a série $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$ converge e temos:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\gamma F(z)dz - \sum_{k=0}^{n} \int_\gamma f_k(z)dz\Big| &= \Big|\int_\gamma (F(z) - F_n(z))dz\Big| \\
&\leq \sup_{z\in\gamma^*} \big|F(z) - F_n(z)\big|\, l(\gamma) \\
&\leq \sup_{z\in\gamma^*} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)|\, l(\gamma) \\
&\leq l(\gamma) \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k
\end{aligned}$$

Sendo $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ convergente, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = 0$, o que estabelece o pretendido.
□

Note-se que, se $|w - a| > r$,

$$\Big|\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\Big| \leq \frac{1}{r}\Big(\frac{|z-a|}{r}\Big)^n =: M_n$$

e a série $\sum M_n$ converge desde que se tenha $|z - a| < r$, o que permite concluir que a função Ind_γ é representável por uma série de potências.

Dado que a imagem de um conjunto conexo por uma função contínua é um conjunto conexo e, sabendo que Ind_γ toma apenas valores inteiros, concluimos que Ind_γ deve ser constante em cada componente conexa de S.

Finalmente, da definição de Ind_γ deduz-se que, para $|z|$ suficientemente grande, se tem $|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| < 1$, o que implica que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ na componente não limitada de S.

De facto, seja $R > 2\max\{|z| :\ z \in \gamma^*\}$ e consideremos o conjunto

$$S_R = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - w| > \frac{R}{2};\ \forall w \in \gamma^*\}$$

Para $z \in S_R$, temos,

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \Big|\frac{1}{w-z}\Big| dw \leq \frac{l(\gamma)}{\pi R}$$

Exemplo: Seja $\gamma(t) = a + re^{it}$ em que $r > 0$ e $0 \leq t \leq 2\pi$. Então, para $|z-a| < r$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = 1$$

ou seja,

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } |z-a| < r \\ 0, & \text{se } |z-a| > r \end{cases} \tag{1.3.1}$$

1.4 Fórmulas Integrais de Cauchy

Teorema 1.4.1 *Seja γ um caminho fechado e contido num aberto e em estrela S e seja f uma função analítica em S. Então, para $z \in S \setminus \gamma^*$ tem-se*

$$f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \tag{1.4.2}$$

Dem.: Seja $z \in S \setminus \gamma^*$ e consideremos a seguinte função

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & \text{se } w \in S,\ w \neq z \\ f'(z), & \text{se } w = z \end{cases}$$

Esta função satisfaz as condições do teorema 1.1.2 e, portanto,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(w)dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z) \end{aligned}$$

□

Para o caso em que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 1$ obtém-se uma fórmula integral para a função f o que permitirá representar funções analíticas em termos de séries de potências. De facto, se tomarmos para γ uma circunferência, o teorema seguinte estabelece essa representação.

Teorema 1.4.2 *Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : S \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Então f é representável por uma série de potências em S.*

Dem.: Seja $a \in S$ e $R > 0$ tal que $D_R(a) \in S$. Seja γ uma circunferência centrada em a, de raio $r < R$ e percorrida uma vez no sentido positivo. Sendo $D_R(a)$ um conjunto convexo, estão satisfeitas as condições do teorema anterior. Note-se que, para esta circunferência se tem $\text{Ind}_\gamma(z) = 1$ em que $z \in D_r(a)$. Portanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\ , \qquad (z \in D_r(a))$$

Seguindo os mesmos passos da prova de que a função índice é analítica, concluimos que existe uma sucessão de coeficientes (c_n) tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\ , \qquad (z \in D_r(a))$$

Da unicidade dos coeficientes c_n, obtemos a mesma série para qualquer $r < R$ desde que a esteja fixado. Portanto, a representação em série de potências é válida para todo $z \in D_R(a)$ como era pretendido. □

A tal série de potências chamamos série de Taylor de f.

Sendo f representável por uma série de potências, a derivada f' também o será, ou seja, a derivada de uma função analítica é uma função analítica. Do estudo das séries de potências e do teorema anterior obtemos as chamadas fórmulas integrais de Cauchy:

$$c_n n! = f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\ , \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.4.3}$$

em que $\gamma^* \subset S$ é uma circunferência centrada em a e descrita uma vez no sentido positivo.

Exemplos:

- Seja $\gamma(t) = i + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

  Então,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{z^2}{z^2+1}dz &= \int_\gamma \frac{z^2}{(z+i)(z-i)}dz \\ &= 2\pi i\left[\frac{z^2}{z+i}\right]_{z=i} = -\pi\end{aligned}$$

- Seja $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Então, usando a fórmula (1.4.3),

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3}dz = \left[\frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2}{dz^2}e^z\right]_{z=0} = \pi i$$

- Para calcular o integral $\int_\gamma \frac{\operatorname{Re} z}{z-\frac{1}{2}} dz$, em que γ é o caminho do exemplo anterior, não podemos usar a fórmula de Cauchy porque $\operatorname{Re} z$ não é uma função analítica.

  No entanto, para $|z| = 1$ temos:

$$\operatorname{Re} z = \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

  Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{\operatorname{Re} z}{z - \frac{1}{2}} dz &= \int_\gamma \frac{z^2 + 1}{2z(z - \frac{1}{2})} dz \\ &= \int_\gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z} + \frac{5}{2(2z - 1)} \right) dz \\ &= 0 - 2\pi i + 5\frac{\pi}{2} i = \frac{\pi i}{2} \end{aligned}$$

1.5 Teorema de Morera

O teorema seguinte designado por Teorema de Morera estabelece o recíproco do teorema de Cauchy.

Teorema 1.5.1 *Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : S \to \mathbb{C}$ uma função contínua tal que*

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

para todo o triângulo fechado $\Delta \subset S$. Então, f é uma função analítica em S.

Dem.: Seja $a \in S$ e $r > 0$ tal que $D_r(a) \subset S$. Sendo $D_r(a)$ um conjunto aberto e convexo, existe uma função F analítica em $D_r(a)$ tal que $F' = f$ e, portanto, f é também analítica em $D_r(a)$. Dado que $a \in S$ é arbitrário, concluimos que f é analítica em S. $\square$

1.6 Teorema de Liouville

Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira e limitada. Consideremos dois pontos $a, b \in \mathbb{C}$. Seja $R \geq 2 \max(|a|, |b|)$ tal que se tenha $|w - a| \geq \frac{R}{2}$ e $|w - b| \geq \frac{R}{2}$ para $|w| = R$. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Aplicando a fórmula integral de Cauchy (1.4.2), obtemos:

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) \left(\frac{1}{w - a} - \frac{1}{w - b} \right) dw$$

e, portanto,

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi RM \frac{|a-b|}{(\frac{1}{2}R)^2}$$

em que M é tal que $|f(w)| \leq M$, $\forall w \in \mathbb{C}$. Sendo R arbitrário, concluímos que $f(a) = f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$.

Temos, assim, o chamado Teorema de Liouville:

Teorema 1.6.1 *Uma função inteira e limitada é constante.*

□

1.7 Teorema Fundamental da Álgebra

Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinómio não constante de coeficientes complexos. Suponhamos que $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Dado que, se $|z| \to \infty$, então $|p(z)| \to \infty$, existe $R > 0$ tal que $\frac{1}{|p(z)|} < 1$ para $|z| > R$. Por outro lado, no compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ a função $\frac{1}{p(z)}$ é contínua e, portanto, limitada. Assim, a função $\frac{1}{p(z)}$ é limitada em $\mathbb{C}$ e, sendo inteira, pelo teorema de Liouville, concluimos que $\frac{1}{p(z)}$ deve ser constante. Temos, assim, o chamado Teorema Fundamental da Álgebra que estabelece a existência de zeros de polinómios:

Teorema 1.7.1 *Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinómio não constante de coeficientes complexos. Então existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $p(w) = 0$.*

1.8 Zeros de Funções Analíticas

O facto de que uma função analítica é representável localmente por uma série de potências permite caracterizar o seu conjunto de zeros.

Seja $S \subset \mathbb{C}$ um aberto e conexo e $f : S \to \mathbb{C}$ um função analítica e designemos por $Z(f) = \{a \in S : f(a) = 0\}$ o conjunto dos zeros de f . Seja A o conjunto de pontos de acumulação de $Z(f)$. Sendo f contínua, $A \subset Z(f)$. Fixemos $a \in Z(f)$, e seja $r > 0$ tal que $D_r(a) \subset S$ e em que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \,, \qquad (z \in D_r(a))$$

Se todos os coeficientes c_n forem nulos, $D_r(a)) \subset A$ e a é um ponto interior de A . Caso contrário, como $f(a) = 0$, existe o menor dos inteiros $m > 0$ tal que $c_m \neq 0$. Neste caso, defina-se

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z), & \text{se } z \in S \setminus \{a\} \\ c_m, & \text{se } z = a \end{cases}$$

Desta definição fica claro que g é uma função analítica em $S \setminus \{a\}$ e, da série para f obtemos a representação em série de potências para g :

$$g(z) = \sum_{k=0} c_{m+k}(z-a)^k \ , \qquad (z \in D_r(a))$$

e, portanto, g é uma função analítica em S. Para além disso, $g(a) = c_m \neq 0$ e, sendo g contínua, existe um disco centrado em a onde não existem zeros de g , ou seja, a é um ponto isolado de $Z(f)$.

Assim, se $a \in A$, todos os coeficientes c_n são nulos e, portanto, A é um conjunto aberto. Por outro lado, por definição A é fechado. Dado que S é conexo, ou $A = S$ e então $Z(f) = S$, ou $A = \emptyset$.

Portanto, ou $Z(f) = S$ ou $Z(f)$ não tem pontos de acumulação em S.

Se $A = \emptyset$, em cada compacto de S não poderá ocorrer mais do que um número finito de zeros de f . Como S pode ser descrito como uma união numerável de compactos, concluimos que $Z(f)$ é, quanto muito, numerável.

O que acaba de ser exposto pode ser resumido no teorema seguinte:

Teorema 1.8.1 *Seja* $S \subset \mathbb{C}$ *um aberto e conexo,* $f : S \to \mathbb{C}$ *uma função analítica e* $Z(f) = \{a \in S : f(a) = 0\}$ *. Então, ou* $Z(f) = S$ *ou* $Z(f)$ *não tem pontos de acumulação em* S*. No segundo caso, a cada* $a \in Z(f)$ *corresponde um único inteiro* $m = m(a)$ *tal que*

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \ , \qquad (z \in S) \tag{1.8.4}$$

em que g *é uma função analítica em* S *e* $g(a) \neq 0$*. Além disso,* $Z(f)$ *é um conjunto contável.*

Ao inteiro m chama-se ordem do zero e no caso em que $m = 1$ diz-se que o zero é simples. Desta caracterização dos zeros de uma função analítica deduz-se o seguinte teorema de unicidade que estabelece que uma função analítica num aberto conexo S fica completamente definida sobre qualquer conjunto com pontos de acumulação em S.

Teorema 1.8.2 *Sejam* f, g *duas funções analíticas num aberto e conexo* S*. Se* $f(z) = g(z)$ *num conjunto com pontos de acumulação em* S *, então* $f(z) = g(z)$ *em* S*.*

Note-se que este teorema deixa de ser válido para o caso em que S não é conexo. De facto, se $S = S_1 \cup S_2$ em que S_1 , S_2 são abertos disjuntos, considere-se a função definida por

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z \in S_1 \\ 1, & \text{se } z \in S_2 \end{cases}$$

1.9 Teorema do Módulo Máximo

Tal como para os zeros de uma função analítica $f : S \to \mathbb{C}$ definida num aberto e convexo, os pontos de máximo de $|f|$ obedecem a restrições que só não se verificam para funções constantes.

Teorema 1.9.1 *Seja f uma função definida e analítica num disco $D_R(a)$ e tal que $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in D_R(a)$. Então f é constante.*

Dem.: Seja $0 < r < R$ e $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Pela fórmula integral de Cauchy temos,

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt \end{aligned}$$

Dado que $r < R$ e, por hipótese, $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in D_R(a)$, obtemos,

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|dt \leq |f(a)|$$

e, portanto,

$$\int_0^{2\pi} \Big[|f(a)| - |f(a+re^{it})|\Big]dt = 0$$

Sendo a função integranda contínua e não negativa, deve ser nula, ou seja, f é constante em $D_R(a)$.

□

Seja S um aberto, conexo e limitado e f uma função analítica em S e contínua em $\overline{S}$. Assim, $|f|$ tem máximo em $\overline{S}$. Suponhamos que o ponto de máximo se situa no interior de S. Pelo teorema anterior, f deve ser constante em algum disco centrado nesse ponto o que implica que f deve ser constante em S por unicidade. Por ser contínua, f é constante em $\overline{S}$ e, portanto, $|f|$ tem o seu máximo sobre a fronteira de S. Tem-se, assim, o teorema do módulo máximo:

Teorema 1.9.2 *Seja S um aberto, conexo e limitado e f uma função analítica em S e contínua em $\overline{S}$. Então, $|f|$ tem o seu máximo sobre a fronteira de S.*

Como exemplo de aplicação deste teorema, consideremos uma função f analítica em $D_1(0)$. Suponhamos que se tem

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ |f(z)| &\leq 1\,; \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

Consideremos a função g definida por

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f(z)}{z}\,, \quad z \neq 0 \\ g(0) &= f'(0) \end{aligned}$$

Sendo g analítica em $D_1(0)$, pelo teorema do módulo máximo concluimos que se tem

$$|g(z)| \leq 1$$

ou seja

$$|f(z)| \leq |z| \;, \quad z \in D_1(0)$$

e, em particular,

$$|f'(0)| \leq 1$$

Se para algum $z \in D_1(0)$ tivermos $|g(z)| = 1$, então, pelo teorema do módulo máximo, a função g será constante em $D_1(0)$, ou seja, $g(z) = \lambda$ em que $|\lambda| = 1$. Portanto, a função f terá a seguinte forma

$$f(z) = e^{i\alpha} z$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $\lambda = e^{i\alpha}$.

1.10 Exercícios

Nesta série de exercícios, iremos denotar por $\gamma(a, r)$ a circunferência centrada em $a \in \mathbb{C}$ e de raio r e percorrida no sentido positivo, ou seja,

$$\gamma(a, t) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\} = \{a + re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$$

1. Mostre que sobre a circunferência $\gamma^* = \{z : |z| = R > 1\}$ se tem

$$\left| \int_\gamma \frac{\text{Log}(z)}{z^2} dz \right| < 2\pi \frac{\pi + \log(R)}{R}$$

2. Use o teorema de Cauchy para mostrar que se tem

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 0$$

nos casos seguintes:

a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z - 3}$

b) $f(z) = \tan(z)$

c) $f(z) = \text{Log}(z + 2)$

3. Considere a função $f(z) = z^{1/2}$ com $f(0) = 0$ e $|z| > 0 \;; -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$. Seja $\gamma^* = \{z : |z| = 1; \text{Im}(z) \geq 0\}$. Mostre que o teorema de Cauchy não se aplica no cálculo do integral $\int_\gamma f(z) dz$. Calcule esse integral.

4. Para $\gamma = \gamma(0, 2)$, calcule os integrais:

a) $\int_\gamma \frac{z^3+5}{z-i}dz$

b) $\int_\gamma \frac{1}{z^2+z+1}dz$

c) $\int_\gamma \frac{\text{sen}(z)}{z^2+1}dz$

d) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^n}dz$

e) $\int_\gamma \frac{dz}{z}$

5. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e convexo e $f : A \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Seja γ um caminho fechado em A e $z_0 \in A \setminus \gamma^*$. Mostre que se tem

$$\int_\gamma \frac{f'(w)}{w-z_0}dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw$$

6. Seja f uma função inteira tal que $\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Prove que f é constante.

7. Seja f uma função analítica em $\mathbb{C}$. Prove que, se existem constantes M e K e um inteiro positivo n tais que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| \geq K$, então f é um polinómio de grau menor ou igual a n.

8. Seja A um subconjunto convexo de $\mathbb{C}$ e $f : A \to \mathbb{C}$ uma função analítica e não nula. Mostre que
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$$
em que γ é um caminho fechado em A.

9. Seja f uma função analítica no disco fechado $\overline{D_1(0)}$. Prove que, se para algum $r > 0$ e algum $a \in \mathbb{C}$ se tem $f(\partial D_1(0)) \subset D_r(a)$, então

$$f(D_1(0)) \subset D_r(a)$$

10. Prove que uma função analítica numa estrela tem primitiva.

11. Seja $S \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : S \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Suponhamos que f é analítica em $S \setminus [a,b]$ em que $[a,b] \subset S$ é um segmento de recta. Prove que f é analítica em S.

12. Seja f uma função analítica num domínio $S \subset \mathbb{C}$. Considerando a função e^f, mostre que $\text{Re}(f)$ não pode ter máximo em S.

Capítulo 2

Singularidades

2.1 Classificação

Consideremos a função $f(z) = \frac{1}{z}$, que, como vimos, desempenha um papel importante no teorema de Cauchy e, especialmente, nas suas consequências. Esta função apresenta a particularidade de não estar definida na origem e é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Em particular, é analítica em qualquer coroa circular centrada na origem. Nesta secção analisaremos, com algum pormenor, as funções que são analíticas excepto em pontos isolados e obteremos uma classificação desses pontos a que chamaremos singularidades.

Seja $S \subset \mathbb{C}$ um aberto, $a \in S$ e f uma função analítica em $S \setminus \{a\}$. Diz-se, neste caso, que f tem uma **singularidade** em a.

Se $\lim_{z\to a} f(z)$ existe, diz-se que f tem uma singularidade **removível** em a. Neste caso, f pode ser definida em S tomando $f(a) = \lim_{z\to a} f(z)$.

Chamaremos disco perforado em a ao conjunto $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$.

Teorema 2.1.1 *Seja f uma função analítica em $S \setminus \{a\}$ e limitada em algum disco perforado $D_r^*(a)$. Então f tem uma singularidade removível em a.*

Dem.: Seja $h : S \to \mathbb{C}$ definida do seguinte modo:

$$h(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z = a \\ (z-a)^2 f(z), & \text{se } z \neq a \end{cases}$$

Sendo f limitada em algum disco perforado, obtemos,

$$\left|\frac{h(z) - h(a)}{z - a}\right| = |(z-a)f(z)| \leq M|z-a|$$

em que M é tal que $|f(z)| \leq M, \ \forall z \in D_r^*(a)$.

Portanto, h é diferenciável em a e $h'(a) = 0$.

Assim, h é analítica em S e pode ser representada pela série de potências

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n \ , \qquad (z \in D_r(a))$$

Tomando $f(a) = c_2$, obtemos uma extensão analítica de f em S e representada pela série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-a)^n \ , \qquad (z \in D_r(a))$$

□

Note-se que a função $f(z) = \frac{1}{z}$ não se encontra nas condições do teorema anterior o que nos leva a pensar no tipo de singularidades que uma função pode apresentar. O teorema seguinte resolve este problema apresentando uma classificação exaustiva das singularidades isoladas.

Teorema 2.1.2 *Seja $a \in S$ uma singularidade de f. Então, apenas três casos podem ocorrer:*

a) f tem uma singularidade removível em a.

b) Existem complexos $c_1, c_2, \ldots, c_m$, sendo $m \in \mathbb{N}$ e $c_m \neq 0$, tais que a função

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

tem uma singularidade removível em a.

c) Se $r > 0$ e $D_r(a) \subset S$, então $f(D_r^*(a))$ é um conjunto denso no plano complexo.

No caso b), diz-se que f tem um **polo** de ordem m em a e diz-se que a função $\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ é a parte principal de f em a.

É claro que se f tem um polo em a, então

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$$

Ao número m chamamos ordem do polo e no caso em que $m = 1$ dizemos que o **polo é simples**.

No caso c), diz-se que f tem uma **singularidade essencial** em a. Dito de outra forma, a cada complexo w corresponde uma sucessão (z_n) tal que $z_n \to a$ e $f(z_n) \to w$, ou equivalentemente,

$$\forall w \in \mathbb{C},\ \forall \epsilon > 0,\ \forall r > 0,\ \exists z \in D_r^*(a)\ :\ |f(z) - w| < \epsilon$$

No que segue e sempre que não haja perigo de confusão denotaremos

$$D = D_r(a) \ , \quad D^* = D_r^*(a) \ .$$

Dem.: (cf. [6]) Suponhamos que c) não se verifica. Então, existem $r > 0$, $\epsilon > 0$ e $w \in \mathbb{C}$ tais que $|f(z) - w| > \epsilon$ em $D_r^*(a)$. Seja g a função definida por

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}\ , \qquad (z \in D^*) \tag{2.1.1}$$

Então, g é analítica em D^* e $|g| < \frac{1}{\epsilon}$. Pelo teorema 2.1.1, g é analítica em D, pelo que, dois casos podem ocorrer.

Se $g(a) \neq 0$, sendo $f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$, obtemos que f é limitada em algum disco perforado $D_\rho^*(a)$, o que, pelo teorema 2.1.1, significa que f tem uma singularidade removível em a.

Se a é um zero de g de ordem $m \geq 1$, temos

$$g(z) = (z-a)^m g_1(z) \qquad (z \in D)$$

em que g_1 é analítica e não nula em D.

Assim, seja $h = \frac{1}{g_1}$. Então, h é analítica e não nula em D, o que permite escrever

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \qquad (z \in D)$$

em que $b_0 \neq 0$.

Por outro lado, de (2.1.1), obtemos para $z \in D^*$,

$$\begin{aligned} f(z) - w &= (z-a)^{-m} h(z) \\ &= (z-a)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \\ &= \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + b_m + \sum_{k=1}^{\infty} b_{m+k}(z-a)^k \end{aligned}$$

ou seja, a função $f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{m-k}}{(z-a)^k}$ tem uma singularidade removível em a. □

2.2 Série de Laurent

Da correspondência entre funções analíticas e séries de potências e tendo em conta o teorema 2.1.2 podemos concluir que se uma função f tiver uma singularidade não removível em algum ponto a não poderá ser representada por uma série de potências relativa a esse ponto. No entanto, se considerarmos potências com expoentes inteiros $n \in \mathbb{Z}$, será possível obter uma representação em termos de séries do tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n\ .$$

definidas em algum disco perforado $D_r^*(a)$.

Sejam R e S números reais tais que $(0 \leq R < S \leq \infty)$ e f uma função analítica na coroa circular $\{z \in \mathbb{C} : \ R < |z| < S\}$. Por razões de clareza fixemos a seguinte notação:

$\gamma(a,r)$ designa a cincunferência de raio r e centro em a e percorrida uma vez no sentido positivo;

$\gamma_r(z,w)$ designa o arco de circunferência de raio r e centro na origem e percorrida desde o ponto z até ao ponto w no sentido positivo;

$[z,w]$ designa o segmento de recta percorrido de z para w.

$A(R,S)$ designa a coroa circular de raios R e S com $0 \leq R < S \leq \infty$ e centro na origem do plano complexo.

$I(\gamma)$ designa o conjunto aberto e limitado pela linha simples e fechada γ^* e chama-se, abusivamente, interior de γ^*.

Lema 2.2.0.1

$$\int_{\gamma(0,r)} \frac{f(w)}{w^n} dw = \int_{\gamma(0,R)} \frac{f(w)}{w^n} dw \ , \qquad 0 < r < R \ , \ n \in \mathbb{Z} \tag{2.2.2}$$

Dem.: (cf. [5]) Consideremos os caminhos seguintes (ver figura 2.2.1):

- $\gamma_1 = \gamma_R(R, iR) \ + \ [iR, ir] \ - \ \gamma_r(r, ir) \ + \ [r, R]$
- $\gamma_2 = \gamma_R(iR, -R) \ + \ [-R, -r] \ - \ \gamma_r(-ir, r) \ + \ [ir, iR]$
- $\gamma_3 = \gamma_R(-R, -iR) \ + \ [-iR, -ir] \ - \ \gamma_r(-r, -ir) \ + \ [-r, -R]$
- $\gamma_4 = \gamma_R(-iR, R) \ + \ [R, r] \ - \ \gamma_r(-ir, r) \ + \ [-ir, -iR]$

Note-se que cada um dos caminhos γ_i está contido num quadrante do plano complexo. Portanto, pelo teorema de Cauchy, obtemos:

$$\int_{\gamma_i} \frac{f(w)}{w^n} dw = 0, \qquad i = 1,2,3,4$$

Por outro lado,

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} \frac{f(w)}{w^n} dw = \int_{\gamma(0,R)} \frac{f(w)}{w^n} dw - \int_{\gamma(0,r)} \frac{f(w)}{w^n} dw$$

Portanto,

$$\int_{\gamma(0,R)} \frac{f(w)}{w^n} dw = \int_{\gamma(0,r)} \frac{f(w)}{w^n} dw$$

□

A prova deste Lema mostra que o mesmo se passa se substituirmos a circunferência $\gamma(0,r)$ por uma linha fechada simples e contida no aberto limitado por $\gamma(0,R)$ e tal que $0 \in \gamma$. Note-se que tal circunferência existe dado que $I(\gamma)$ é um conjunto aberto.
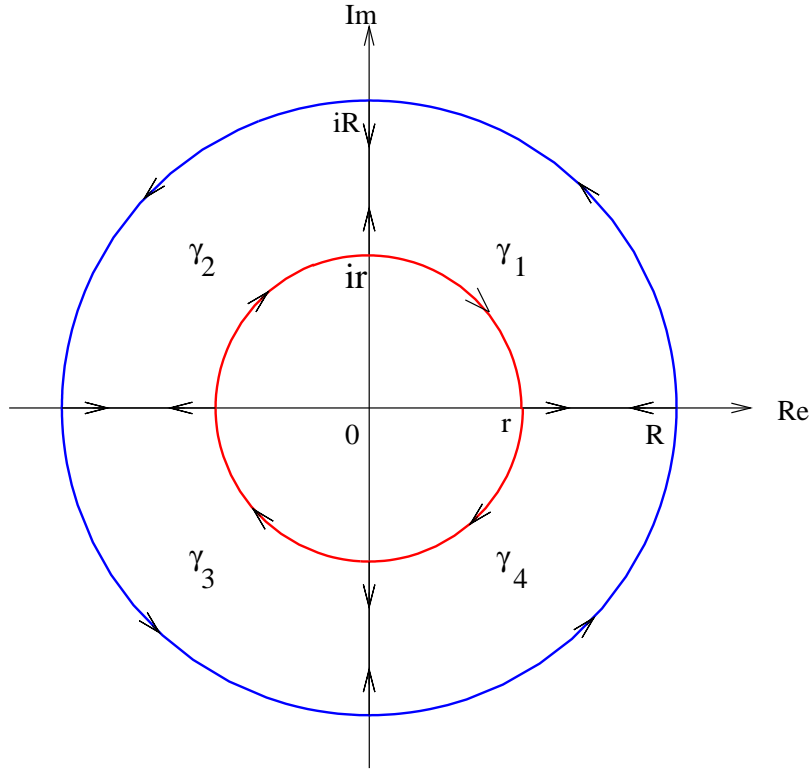
Figura 2.2.1: Invariância do integral

Teorema 2.2.1 *Seja f uma função analítica na coroa circular $A(R,S)$. Então,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \,, \qquad (z \in A) \tag{2.2.3}$$

em que

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \tag{2.2.4}$$

sendo $\gamma = \gamma(0,r)$, $(R < r < S)$

Dem.: Seja $z \in A(R,S)$ e $P, Q > 0$ tais que $R < P < |z| < Q < S$ (ver figura 2.2.2).

Usando o teorema de Cauchy e considerando os caminhos $\gamma(0,Q)$ e $\gamma(0,P)$, obtemos,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0,Q)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0,P)} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0,Q)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} f(w) dw - \int_{\gamma(0,P)} \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{w^m}{z^{m+1}} f(w) dw \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Note-se que $\left|\frac{w}{z}\right| < 1$ para $w \in \gamma(0,P)$ e $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$ para $w \in \gamma(0,Q)$.
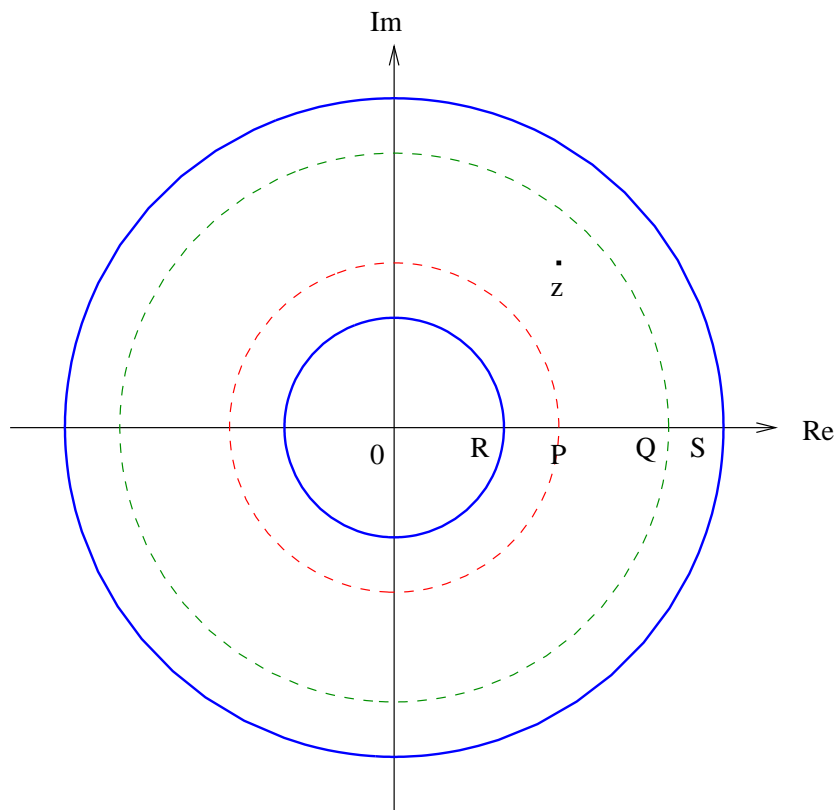
Figura 2.2.2: Coroa circular $A(R, S)$

Pelo Lema 1.3.0.1, podemos trocar o integral com a série em (2.2.5), ou seja,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(0,Q)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw\Big)z^n + \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\int_{\gamma(0,P)} f(w)w^m dw\Big)z^{-m-1}$$

Fazendo $n = -m - 1$ no segundo somatório e tendo em conta o Lema 2.2.0.1 obtemos a série de Laurent para a função f. $\square$

É importante notar que a série de Laurent é única. De facto, se f fosse representada, em A, por outra série de Laurent com coeficientes b_n, de (2.2.4), teríamos,

$$\begin{aligned}
2\pi i c_n &= \int_{\gamma(0,r)} f(w)w^{-n-1}dw = \int_{\gamma(0,r)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k w^{k-n-1}dw \\
&= \int_{\gamma(0,r)} \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^{k-n-1}dw + \int_{\gamma(0,r)} \sum_{m=1}^{\infty} b_{-m} w^{-m-n-1}dw \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \int_{\gamma(0,r)} w^{k-n-1}dw = 2\pi i b_n
\end{aligned}$$

Este resultado de unicidade revela-se muito importante no cálculo dos coeficientes da série de Laurent. Note-se que para a série de Taylor os coeficientes estão relacionados com as derivadas da função representada o que não acontece com os coeficientes da série de Laurent. No entanto, a unicidade de representação permite obter esses coeficientes desde que sejam conhecidos para alguns casos particulares. Em grande número de aplicações, interessa calcular apenas alguns desses coeficientes.

Note-se que, até este ponto, todos os cálculos foram efectuados supondo que a função f tem uma singularidade na origem do plano complexo. No entanto, todos esses cálculos permanecem válidos para o caso em que f tenha uma singularidade num ponto $a \neq 0$. Assim, numa coroa $\{z: \ 0 < |z-a| < r\}$ a função f pode ser representada pela série de Laurent dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{2.2.6}$$

em que os coeficientes c_n são calculados da forma seguinte

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \tag{2.2.7}$$

Exemplos:

- Seja $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$. Então f é analítica em cada uma das coroas $A(0,1)$ e $A(1,\infty)$. Podemos reescrever f na forma seguinte

  $$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

  e, portanto,

  $$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} z^n \ , \qquad (z \in A(0,1)) \tag{2.2.8}$$

  Na coroa $A(1,\infty)$, temos,

  $$f(z) = z^{-1} - z^{-1}(1-z^{-1})^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (-z^n)$$

- A função $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$ é analítica na coroa $A = \{z: \ 0 < |z-1| < 1\}$. Sendo

  $$z(z-1)^2 = (z-1)^2(1+(z-1))$$

  obtemos

  $$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}[1-(z-1)+(z-1)^2 - \cdots] = \sum_{n=-2}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \tag{2.2.9}$$

Nestes casos, recorremos ao conhecimento da série geométrica o que, por unicidade, permitiu obter os coeficientes da série de Laurent de f para cada uma das coroas consideradas.

- A função $\text{cosec}(z)$ é analítica excepto nos pontos $z = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ e, portanto, será representada por uma série de Laurent em $0 < |z| < \pi$.

$$sen(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = z\big(1 - \frac{z^2}{6} + h(z)\big)$$

em que h é uma função analítica tal que, numa vizinhança da origem, verifica $|h(z)| \leq M|z^4|$, ou seja $h(z) = O(z^4)$.

Tendo em conta que para $|w| < 1$ se tem $\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \cdots$, obtemos,

$$\text{cosec}(z) = \frac{1}{\text{sen}(z)} = \frac{1}{z}\big[1 - \big(\frac{z^2}{6} + O(z^4)\big)\big]^{-1} = \frac{1}{z}\big(1 + \frac{z^2}{6} + O(z^4)\big) \qquad (2.2.10)$$

para $|z|$ pequeno.

- A função

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\text{sen}(z)}$$

é analítica para $0 < |z| < \pi$. Numa vizinhança da origem, temos,

$$\begin{aligned} \cot(z) &= \big(1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4)\big)\big(\frac{1}{z} + \frac{z}{6} + O(z^3)\big) \\ &= \frac{1}{z}\big(1 + z^2\big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\big) + O(z^4)\big) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} + O(z^3)\ , \qquad (0 < |z| < \pi) \qquad (2.2.11)$$

- Dado que $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ em $\mathbb{C}$ temos

$$\exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \qquad (2.2.12)$$

em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

A classificação das singularidades de uma função pode ser reformulada em termos da respectiva série de Laurent (cf. [5]). Seja a uma singularidade isolada de f. Então f

é analítica em alguma coroa $A = \{z : \ 0 < |z-a| < r\}$ e pode ser representada pela respectiva série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = f_s(z) + f_a(z)$$

em que

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

se designa por parte analítica de f e

$$f_s(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

se designa por parte principal ou singular de f.

Então, tendo em conta o teorema 2.1.2, obtemos,

- a é uma singularidade removível se $c_n = 0$ para todo $n < 0$, ou seja, $f = f_a$; $\quad f_s = 0$;
- a é um pólo de ordem $m \geq 1$ se $c_{-m} \neq 0$ e $c_n = 0$ para todo $n < -m$. Neste caso a função f pode ser escrita na forma

  $$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

  em que g é uma função analítica tal que $g(a) = c_{-m} \neq 0$. De facto,

  $$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-a)^k \\ &= \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{k=0}^{\infty} c_{-m+k} (z-a)^k \\ &= \frac{g(z)}{(z-a)^m} \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

- a é uma singularidade essencial se não existe algum m tal que $c_n = 0$ para todo $n < -m$.

Teorema 2.2.2 *Seja f uma função analítica num disco perforado $D_r^*(a)$. Então f tem um polo de ordem m em a se e só se*

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) = D \neq 0 \tag{2.2.14}$$

em que D é uma constante.

Dem.: Suponhamos que a é um polo de ordem m. Então, para $z \in D_r^*(a)$, temos,

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

em que $c_{-m} \neq 0$. Portanto,

$$(z-a)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m}(z-a)^n = g(z)$$

A função g é analítica e $g(a) = c_{-m} \neq 0$. Assim,

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) = c_{-m} \neq 0$$

Consideremos a série de Laurent relativa ao ponto a. Os coeficientes c_n são dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Da condição (2.2.14), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |z-a| < \delta$, então

$$|(z-a)^m f(z) - D| < \epsilon$$

Seja $0 < s < \min\{\delta, r\}$. Então, para $|z-a| = s$ temos,

$$|(z-a)^m f(z)| \leq |D| + \epsilon$$

e portanto,

$$|(z-a)^{-n-1} f(z)| \leq (|D| + \epsilon) s^{-n-m-1}$$

Assim, os coeficientes c_n podem ser estimados do seguinte modo

$$|c_n| \leq (|D| + \epsilon) s^{-n-m}$$

Portanto, para $n < -m$, $s^{-n-m} \to 0$ desde que $s \to 0$, ou seja, $c_n = 0$, o que quer dizer que podemos escrever

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Mas pela condição (2.2.14) obtemos

$$c_{-m} = \lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) = D \neq 0$$

□

Exemplos:

- A função $f(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2}$ tem uma singularidade removível na origem. De facto, tendo em conta que $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}$ obtemos,

$$f(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots$$

- De (2.2.8), (2.2.10) e (2.2.11) concluimos que cada uma das funções $\frac{1}{z(1-z)}$, $\operatorname{cosec}(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}$ e $\cot(z)$ apresenta um polo simples na origem.

- De (2.2.12) concluimos que a função $\exp(\frac{1}{z})$ tem uma singularidade essencial na origem.

2.3 Exercícios

1. Mostre que $\dfrac{1+2z}{z^2+z^3} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \cdots$, para $0 < |z| < 1$.

2. Classifique as singularidades de cada uma das seguintes funções:

   a) $ze^{\frac{1}{z}}$

   b) $\dfrac{z^2}{1+z}$

   c) $\dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z}$

   d) $\dfrac{\cos(z)}{z}$

   e) $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$

   f) $\dfrac{\cos(z)}{z}$

   g) $\dfrac{z}{\cos(z)}$

   h) $g(z) = \dfrac{f(z)}{z-a}$ em que $f(a) = 0$

   g) $g(z) = \dfrac{f(z)}{z-a}$ em que $f(a) \neq 0$

Capítulo 3

Resíduos e Aplicações

3.1 Teorema dos Resíduos

Para funções analíticas e definidas em estrelas, o integral ao longo de um caminho fechado pode ser facilmente calculado usando o teorema de Cauchy. No caso de funções analíticas em coroas circulares, o teorema dos resíduos desempenhará o mesmo papel.

Lema 3.1.0.1 *Seja f uma função analítica tendo um polo no interior de uma linha simples e fechada γ^* e seja*

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

a respectiva série de Laurent. Então

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i c_{-1}$$

Dem.: Seja $r > 0$ tal que $\overline{D_r(a)} \subset I(\gamma)$. Então

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_{\gamma(a,r)} f(z)dz \\
&= \int_{\gamma(a,r)} \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-a)^k dz \\
&= \sum_{k=-m}^{\infty} c_k \int_{\gamma(a,r)} (z-a)^k dz \\
&= 2\pi i c_{-1}
\end{aligned}$$

□

Ao coeficiente c_{-1} da série de Laurent chamamos **resíduo de f relativo ao ponto** a e usaremos o símbolo $\text{res}(f,a)$ para o distinguir.

Teorema 3.1.1 *Seja f uma função analítica com um número finito de polos em $I(\gamma)$ em que γ é um caminho fechado, simples e percorrido no sentido positivo. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_m$ esses pontos. Então*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}(f, a_k)$$

Dem.: Designemos por f_k a parte principal da série de Laurent de f relativa a a_k. Então, a função definida por

$$g := f - \sum_{k=1}^{m} f_k$$

tem singularidades removíveis nos pontos $a_1, \ldots, a_m$ e, portanto g é analítica e, pelo teorema de Cauchy tem-se

$$\int_\gamma g(z)dz = 0$$

donde obtemos, usando o Lema anterior para cada f_k,

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \int_\gamma f_k(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}(f, a_k)$$

□

3.2 Zeros e Polos

O teorema dos resíduos permite contar e localizar os zeros e os polos de uma função. Neste processo, os zeros ou polos de ordem m são contados m vezes.

Teorema 3.2.1 *Seja f uma função analítica com um número finito P de polos e um número finito Z de zeros em $I(\gamma)$, sendo γ um caminho fechado e simples percorrido no sentido positivo. Suponhamos que f é não nula sobre γ^*. Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$$

Dem.: (cf. [6, 5, 1]) A função $\frac{f'}{f}$ é analítica excepto nos zeros e polos de f. Se a é um zero de f de ordem m, então existe uma função analítica g tal que

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

em algum disco $D_r(a)$ e, portanto,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Sendo g não nula em $D_r(a)$, a função $\frac{f'}{f}$ tem apenas um polo simples em a e o respectivo resíduo é m.

Se b é um polo de ordem n, então existe uma função g analítica, tal que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-b)^n}$$

e,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{n}{z-b} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Portanto, $\frac{f'}{f}$ tem um polo simples em b e o respectivo resíduo é $-n$.

Tendo em conta o teorema 3.1.1, fica estabelecido o resultado pretendido. □

O teorema seguinte (Teorema de Rouché) estabelece que duas funções têm o mesmo número de zeros num conjunto se, na fronteira desse conjunto elas estão, de certa maneira, próximas uma da outra.

Teorema 3.2.2 *Seja γ um caminho simples e fechado, f e g duas funções analíticas em $\overline{I(\gamma)}$ e tais que $|f(z)| > |f(z) - g(z)|$ sobre γ^*. Então f e g têm o mesmo número de zeros em $I(\gamma)$.*

Note-se que o número de zeros deve ser finito porque $\overline{I(\gamma)}$ é um conjunto compacto. Caso contrário, pelo teorema da unicidade 1.8.2, f e g seriam identicamente nulas.

Dem.: As funções f e g não têm zeros sobre γ^*, ou seja, por hipótese em γ^*, temos,

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < 1$$

Seja $h = \frac{f}{g}$. Então, $h(\gamma^*) \subset D_1(1)$ e, portanto, considerando o caminho $h \circ \gamma$, obtemos

$$\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \int_{h\circ\gamma} \frac{1}{z}\, dz = \mathrm{Ind}_{h\circ\gamma}(0) = 0$$

Por outro lado,

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Assim, pelo teorema anterior, fica provado o pretendido. □

Exemplos:

- Seja h uma função analítica em $D_1(0)$ e tal que $|h(z)| < 1$ para $|z| = 1$. Então a equação $h(z) = z$ tem apenas uma solução em $D_1(0)$.

  De facto, considerando

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \{z : |z| = 1\} \\ f(z) &= z \\ g(z) &= z - h(z) \end{aligned}$$

  temos,

$$|f(z) - g(z)| = |h(z)| < 1 = |z| = |f(z)|$$

  Pelo teorema de Rouché concluimos que g e f têm o mesmo número de zeros.

- Dado um polinómio p de grau n dado por $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ com $a_n \neq 0$, seja $f(z) = a_n z^n$ e $g(z) = p(z)$. Então

$$|f(z) - g(z)| = |a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}| \leq (n-1)a|z|^{n-1}$$

  em que $|z| > 1$ e $a = \max\{|a_0|, \cdots, |a_{n-1}|\}$.

  Seja $\gamma^* = \{z : |z| = R\}$ com $R > \max\{\frac{(n-1)a}{|a_n|}, 1, R_0\}$ em que R_0 é tal que os zeros do polinómio p se encontram no disco de raio R_0 e centro na origem. Assim, temos

$$|f(z) - g(z)| < |a_n| R^n = |f(z)|$$

  o que, pelo teorema de Rouché, permite concluir que p tem n zeros em $\mathbb{C}$.

3.3 Cálculo de Resíduos

Nesta secção veremos algumas formas de cálculo do resíduo relativo a um polo que não envolvem a série de Laurent (cf. [5, 1, 4, 3, 2]).

- Da definição de resíduo, fica claro que, para uma função f com um polo simples num ponto a, se tem:

$$\operatorname{res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z) \tag{3.3.1}$$

- Suponhamos que f tem um polo de ordem m em a. Em algum disco perforado $D_r^*(a)$ temos:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

  em que g é analítica e $g(a) \neq 0$. Pelas fórmulas integrais de Cauchy para derivadas obtemos,

$$\begin{aligned} g^{(m-1)}(a) &= \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{\gamma(a,\frac{r}{2})}\frac{g(z)}{(z-a)^m}dz \\ &= \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{\gamma(a,\frac{r}{2})} f(z)dz \\ &= (m-1)!\,\mathrm{res}(f,a) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(a) \tag{3.3.2}$$

- Suponhamos que $f(z) = \frac{h(z)}{k(z)}$, em que h e k são analíticas em $D_r(a)$. Suponhamos também que $h(a) \neq 0$, $k(a) = 0$ e $k'(a) \neq 0$.

  Então

$$\begin{aligned} \mathrm{res}(f,a) &= \lim_{z\to a}\frac{h(z)}{k(z)}(z-a) \\ &= \lim_{z\to a} h(z)\frac{z-a}{k(z)-k(a)} \\ &= \frac{h(a)}{k'(a)} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Exemplos:

- A função $f(z) = \frac{1}{(2-z)(z^2+4)}$ tem polos simples nos pontos $\{2,-2i,2i\}$ e, portanto, por (3.3.1), temos

$$\mathrm{res}(f,2) = -\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{res}(f,-2i) = \frac{1}{4i(2-2i)} = \frac{1-i}{16}$$

$$\mathrm{res}(f,2i) = \frac{1}{-4i(2+2i)} = \frac{1+i}{16}$$

- $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ tem polos simples nos pontos $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}}$, $k = 0,1,2,3$.

  Considere-se $h(z) = 1$ e $k(z) = 1+z^4$. Então, por (3.3.3), temos

$$\mathrm{res}(f,z_k) = \Big[\frac{1}{4z^3}\Big]_{z=z_k} = -\frac{1}{4}e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}}$$

- $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4}$ tem um polo de ordem quatro na origem. Por (3.3.2),

$$\text{res}(f,0) = \frac{1}{3!}\Big[\frac{d^3}{dz^3}e^{iz}\Big]_{z=0} = -\frac{i}{6}$$

- $f(z) = \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}$ tem um polo de ordem três em $z = 0$ e polos simples nos inteiros $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Por (3.3.3) temos

$$\text{res}(f,n) = \Big[\pi\frac{\frac{\cos(\pi z)}{z^2}}{\pi\cos(\pi z)}\Big]_{z=n} = \frac{1}{n^2}\,, \qquad n \neq 0$$

Por outro lado, de (2.2.11) e numa vizinhança da origem temos,

$$\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} + \cdots$$

Portanto

$$\text{res}(f,0) = -\frac{\pi^2}{3}$$

3.4 Cálculo de Integrais e de Séries

O teorema dos resíduos permite o cálculo de integrais de funções de variável real e de somas de séries de termos reais.

Consideremos o caminho

$$\gamma = \gamma_R(R,-R) + [-R,R]$$

(ver figura 3.4.1) e seja f uma função complexa de variável complexa.

Então o integral de f ao longo de γ é dado por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_R(R,-R)} f(z)dz + \int_{[-R,R]} f(x)dx$$

Portanto, usando os teoremas de Cauchy e estimando o integral sobre a semicircunferência $\gamma_R(R,-R)$, podemos calcular o integral de f sobre o segmento de recta $[-R,R]$, ou seja, o integral de uma função de variável real no intervalo $]-R,R[$

Do mesmo modo, se considerarmos o caminho (ver figura 3.4.2)

$$\gamma = [-R,S] + [S,S+i\epsilon] + [S+i\epsilon,-R+i\epsilon] + [-R+i\epsilon,-R]$$

podemos calcular o integral de uma função de variável real no intervalo $]-R,S[$.

Assim, será possível calcular integrais de algumas funções de variável real em intervalos não limitados por passagem ao limite fazendo $R,S \to \infty$:
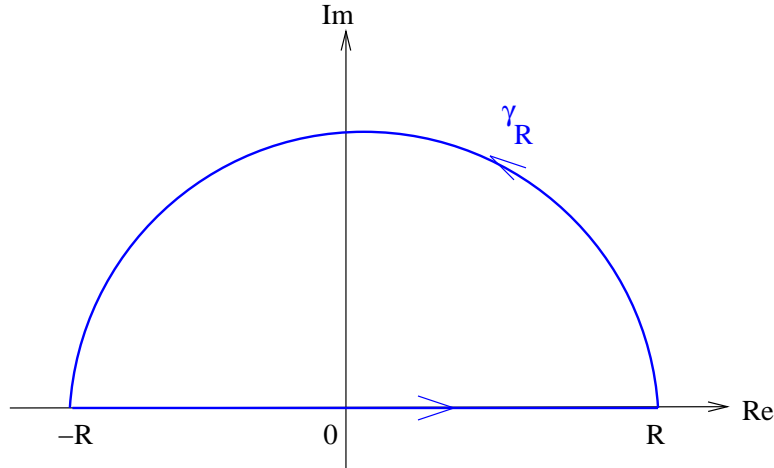
Figura 3.4.1: Concatenação dos caminhos $[-R, R]$ e γ_R

- $\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx$ designado por integral impróprio de f em $]0, \infty[$.
- $\lim_{R,S\to\infty} \int_{-R}^S f(x)dx$ designado por integral impróprio de f em $\mathbb{R}$.

Portanto, poderemos calcular integrais do tipo $\int_0^\infty f(x)dx$ ou $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ entendidos no sentido dos integrais impróprios de Riemann ou no sentido do integral de Lebesgue caso existam. Será também possível calcular integrais de funções trigonométricas.

Integrais do tipo: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Seja f uma função analítica excepto para o conjunto de polos $\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ com parte imaginária positiva.

Suponhamos que existem constantes M e R tais que, para $|z| > R$, se tem

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}\,, \qquad \alpha > 1 \tag{3.4.4}$$

Note-se que se $f = \frac{P}{Q}$ em que P e Q são polinómios de grau n e m, respectivamente, e tais que $m \geq n + 2$, então f verifica a condição (3.4.4).

Seja $r > R$ e consideremos o caminho (ver figura 3.4.3)

$$\gamma = \gamma_r(r, -r) + [-r, r]$$

de tal forma que os polos de f se encontram todos em $I(\gamma)$.
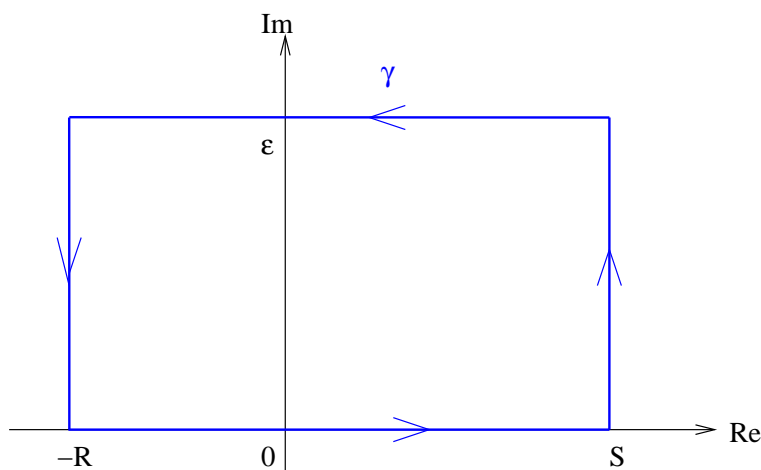
Figura 3.4.2:

Pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \text{res}(f, a_i)$$

Por um lado,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_0^\pi f(re^{it})ire^{it}dt$$

e a condição (3.4.4) permite concluir que o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx$$

existe.

Por outro lado temos,

$$|\int_0^\pi f(re^{it})ire^{it}dt| \leq \pi \frac{M}{r^{\alpha-1}}$$

que converge para zero quando $r \to \infty$, desde que $\alpha > 1$.

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \text{res}(f, a_i)$$

Exemplo: Para calcular o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}dx$$
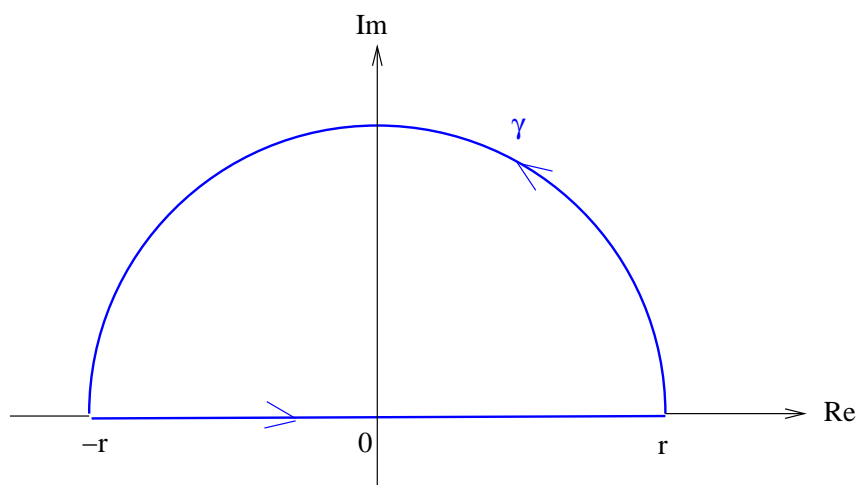
Figura 3.4.3:

determina-se a soma dos resíduos relativos aos polos da função $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ com parte imaginária positiva:

$$\operatorname{res}(f, e^{\frac{\pi i}{4}}) + \operatorname{res}(f, e^{\frac{3\pi i}{4}}) = -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Note-se que se tem

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|R^4 - 1|}$$

para $z = Re^{it}$, ou seja, f verifica a condição (3.4.4).

Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$

Suponhamos que existem constantes $M, R > 0$ tais que, para $|z| > R$, se tem

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \tag{3.4.5}$$

Seja

$$g(z) = e^{i\alpha z} f(z); \quad \alpha > 0$$

e consideremos o caminho (ver figura 3.4.4)

$$\gamma = [-r, s] + [s, s + ip] + [s + ip, -r + ip] + [-r + ip, -r]$$

em que $r, s, p > R$ e tais que os polos de f, $\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$, se encontram em $I(\gamma)$.
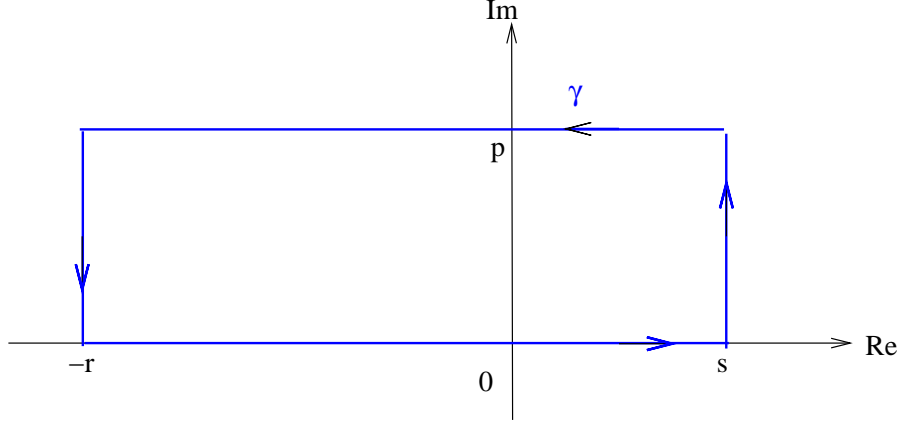
Figura 3.4.4:

Pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \operatorname{res}(g, a_i)$$

Por outro lado, quando $x = s;\ \ 0 < y < p$ temos

$$\int_0^p e^{-\alpha y}|f(s + iy)|dy \leq \frac{M}{s}\int_0^p e^{-\alpha y}dy = \frac{M(1 - e^{-\alpha p})}{as} \leq \frac{M}{as}$$

Do mesmo modo, quando $x = -r;\ \ 0 < y < p$ temos

$$\int_0^p e^{-\alpha y}|f(-r + iy)|dy \leq \frac{M}{ar}$$

Finalmente, para $y = 0;\ \ -r < x < s$

$$\int_{-r}^{s} e^{-\alpha p}|f(x + ip)|dx \leq \frac{Me^{-\alpha p}(r + s)}{p}$$

que converge para zero quando $p \to \infty$. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \operatorname{res}(f(z)e^{i\alpha z}, a_i)$$

Exemplo: Para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi e^{-b}}{2b} \ , \ b>0$$

consideremos a função $g(z) = e^{iz}f(z)$ em que $f(z) = \frac{1}{z^2+b^2}$.

O único polo com parte imaginária positiva é o ponto bi e tem-se

$$\operatorname{res}(f, bi) = \frac{e^{-b}}{2bi}$$

Por outro lado, é claro que f satisfaz a condição (3.4.5).

Portanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+b^2}dx = \operatorname{Re}\big(2\pi i \frac{e^{-b}}{2bi}\big) = \frac{\pi e^{-b}}{b}$$

Integrais trigonométricos

Seja $R(x,y)$ uma função racional que não apresenta polos sobre a circunferência $\gamma = \gamma(0,1)$ e consideremos o cálculo do integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \operatorname{sen}(t))dt$$

Para tal consideremos a função

$$f(z) = \frac{R\big(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\big)}{iz}$$

Assim, f não tem polos sobre γ e sejam $\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ os polos de f em $I(\gamma)$. Pelo teorema dos resíduos, temos

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \operatorname{res}(f, a_i)$$

Mas,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \operatorname{sen}(t))dt &= \int_0^{2\pi} R\big(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\big)\frac{ie^{it}}{ie^{it}}dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(e^{it})ie^{it}dt = \int_\gamma f(z)dz\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \operatorname{sen}(t))dt = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{res}(f, a_i)$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+a^2-2a\cos(t)} \;;\; a>0,\; a\neq 1 \\ &= \int_\gamma \frac{dz}{iz\big(1+a^2-\frac{2a}{2}\left[z+\frac{1}{z}\right]\big)} \\ &= \int_\gamma \frac{dz}{i[-az^2+(1+a^2)z-a]} \\ &= \int_\gamma \frac{idz}{(z-a)(az-1)} \end{aligned}$$

Os polos da função integranda $f(z)=\frac{i}{(z-a)(az-1)}$ são $z=a$ e $z=\frac{1}{a}$.
Para $a<1$, f tem o polo $z=a$ em $I(\gamma)$ e o respectivo resíduo é dado por

$$\operatorname{res}(f,a)=\frac{i}{a^2-1}$$

Para $a>1$, f tem o polo $z=\frac{1}{a}$ em $I(\gamma)$ e o respectivo resíduo é dado por

$$\operatorname{res}(f,\frac{1}{a})=\frac{i}{1-a^2}$$

Portanto, temos,

$$I=\begin{cases} \frac{2\pi}{1-a^2}, & \text{se} \quad a<1 \\ \frac{2\pi}{a^2-1}, & \text{se} \quad a>1 \end{cases}$$

Valor principal de Cauchy

Lema 3.4.0.1 *Suponhamos que f tem um polo simples em a e seja γ_ϵ o arco de circunferência de raio ϵ, centro em a e ângulo α. Então,*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz = i\alpha\operatorname{res}(f,a) \tag{3.4.6}$$

Dem.: Numa vizinhança de a podemos escrever f na forma

$$f(z)=\frac{b}{z-a}+h(z)$$

em que h é analítica, $b=\operatorname{res}(f,a)$ e, portanto,

$$\int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz=\int_{\gamma_\epsilon}\frac{b}{z-a}dz+\int_{\gamma_\epsilon}h(z)dz$$
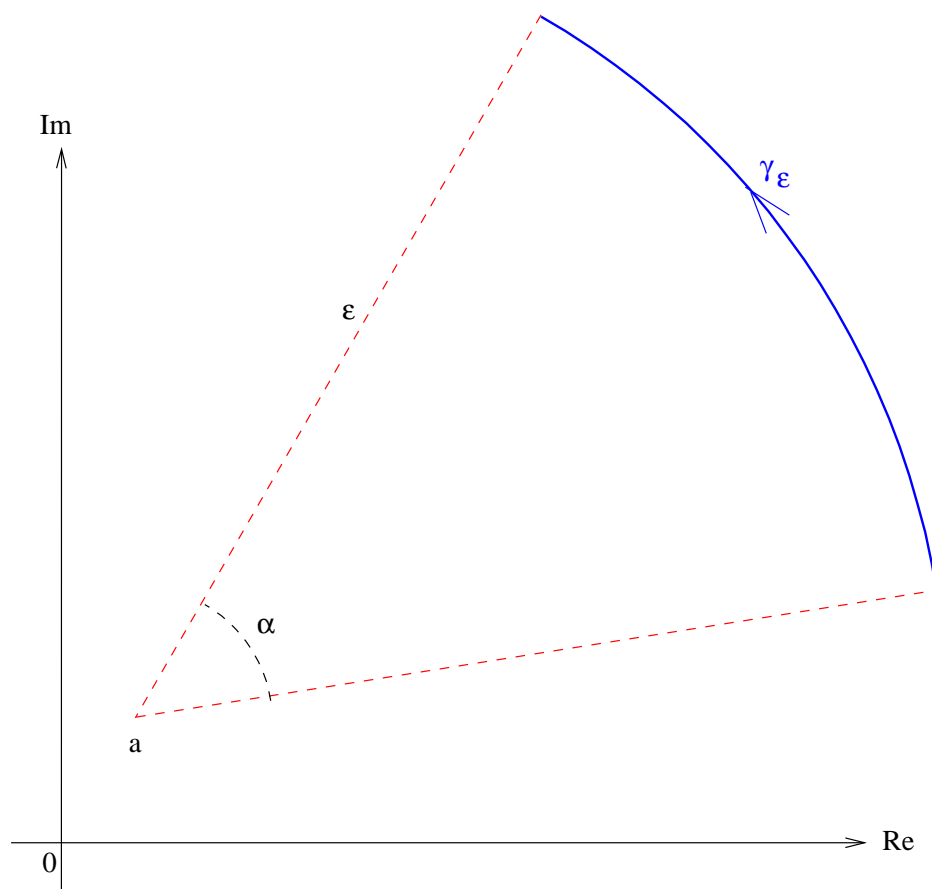
Figura 3.4.5:

Por outro lado,

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{b}{z-a} dz = b \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+\alpha} \frac{\epsilon i e^{it}}{\epsilon e^{it}} dt = ib\alpha$$

em que $\gamma_\epsilon(t) = a + \epsilon e^{it}$, $\alpha_0 \leq t \leq \alpha_0 + \alpha$, como mostra a Figura 3.4.5.

Sendo h analítica, $|f(z)| \leq M$ numa vizinhança de a e, portanto,

$$\Big| \int_{\gamma_\epsilon} h(z) dz \Big| \leq M l(\gamma_\epsilon) = M\alpha\epsilon \to 0$$

quando $\epsilon \to 0$. □

Seja f uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{a_1 < a_2 < \cdots < a_N\}$. Se para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Big[\int_{-\infty}^{a_1-\epsilon} f(x)dx + \int_{a_1+\epsilon}^{a_2-\epsilon} f(x)dx + \cdots + \int_{a_N+\epsilon}^{\infty} f(x)dx \Big]$$

existe, diz-se que este limite é o valor principal de Cauchy e representa-se por $PV. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Seja f uma função analítica excepto para um conjunto finito de polos simples $\{a_1 < a_2 < \cdots < a_N\}$ sobre o eixo real e para um conjunto finito de polos $\{b_1, \ldots, b_K\}$ tais que $\mathrm{Im}(b_i) > 0$. Suponhamos que uma das condições seguintes se verifica:

i) Existem $M, R > 0$ tais que para $|z| > R$ e $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ se tem

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \tag{3.4.7}$$

ii) $f(z) = e^{i\alpha z}g(z)$, em que $\alpha > 0$ e existem $M, R > 0$ tais que, para $|z| > R$ e $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ se tem

$$|g(z) \leq \frac{N}{|z|} \tag{3.4.8}$$

Seja $\gamma = \gamma_r(r, -r) + \gamma_1 + \cdots + \gamma_N + \tilde{\gamma}$ em que $r > \max\{|a_i| : i = 1, 2, \ldots, N\}$, γ_i designa a semicircunferência $\gamma_\epsilon(a_i + \epsilon, a_i - \epsilon)$ e $\tilde{\gamma}$ designa os segmentos de recta sobre o eixo real tais que o caminho γ é fechado (ver figura 3.4.6).
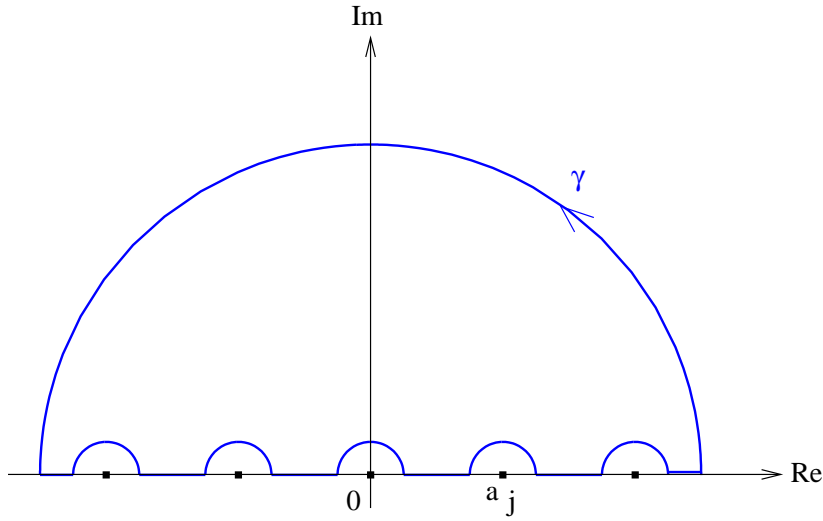
Figura 3.4.6:

A condição (3.4.7) permite concluir que $\int_{\gamma_r(r,-r)} f(z)dz \to 0$ se $r \to \infty$.

O Lema 3.4.0.1 garante que $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_j} f(z)dz = -\pi i \,\mathrm{res}(f, a_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Portanto, temos

$$PV. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} \mathrm{res}(f, b_j) + \pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{res}(f, a_j) \tag{3.4.9}$$

Exemplo: Para mostrar que se tem

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

consideremos a função

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

e o caminho

$$\gamma = \gamma_r(r, -r) - \gamma_\epsilon(\epsilon, -\epsilon) + \tilde{\gamma}$$

em que $\tilde{\gamma}$ designa os dois segmentos de recta sobre o eixo real tais que γ é fechado como mostra a Figura 3.4.7.
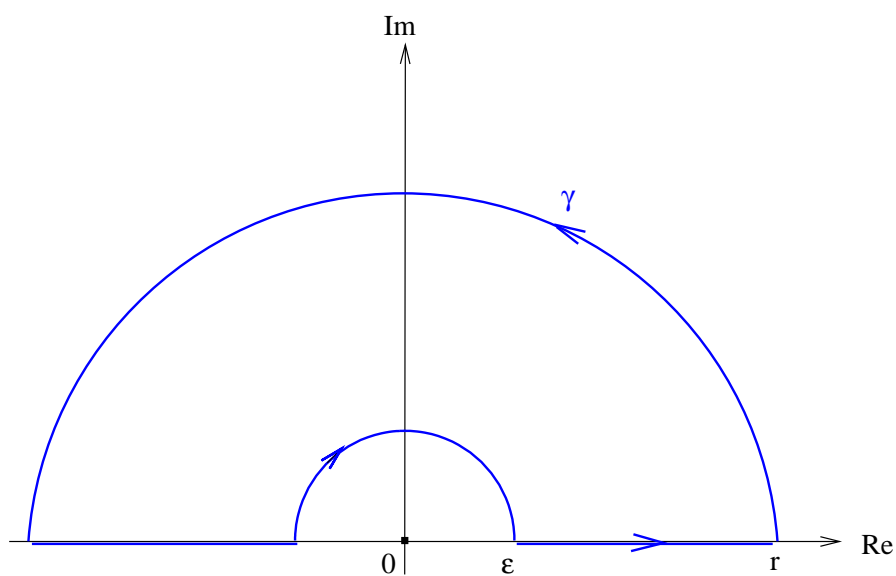
Figura 3.4.7:

Então, por (3.4.9), $PV. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}dx$ existe e tem-se

$$PV. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}dx = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}dx$$

Mas,

$$\int_\gamma f(z)dz = \pi i \,\mathrm{res}(\frac{e^{iz}}{z}, o) = \pi i$$

o que estabelece o que se pretendia.

Integrais de funções multivalentes

Seja f uma função analítica excepto num conjunto finito de polos e consideremos integrais do tipo

$$\int_0^\infty f(x)\log(x)dx \ , \qquad \int_0^\infty f(x)x^{a-1}dx$$

em que $a > 0$.

Exemplo: Para calcular o integral

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}dx$$

consideramos o corte do plano complexo $\mathbb{C}_\pi$ e consideramos o ramo analítico do logaritmo dado por $\log(z) = \log(|z|) + i\theta$ em que $z = |z|e^{i\theta}$ e $-\pi < \theta \leq \pi$.

Assim, a função $f(z) = \frac{\log(z)}{1+z^2}$ é analítica em $\mathbb{C}_\pi$ excepto nos polos $\pm i$.

Consideremos o caminho

$$\gamma = \gamma_R(R, -R) + [-R, -\epsilon] - \gamma_\epsilon(\epsilon, -\epsilon) + [\epsilon, R]$$

em que $R > 1$ (ver figura 3.4.8).
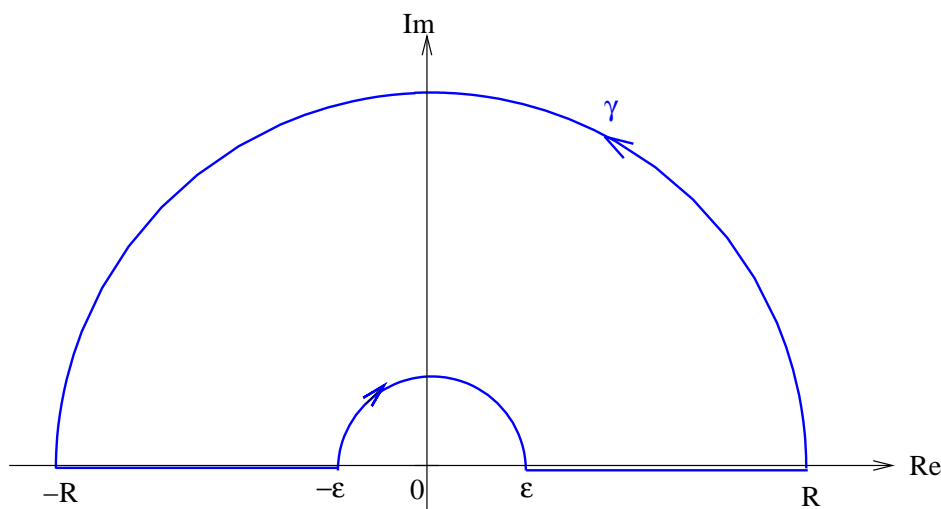
Figura 3.4.8:

Pelo teorema dos resíduos temos,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(f, i) = 2\pi i \frac{\log(i)}{2i} = \frac{1}{2}\pi^2 i$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}|\int_{\gamma_R(R,-R)} f(z)dz| &\leq \int_0^\pi |\frac{\log(R)+i\theta}{1+R^2e^{2i\theta}}iRe^{i\theta}|d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{(\log(R)+\pi)R}{R^2-1}d\theta\end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$|\int_{\gamma_\epsilon(\epsilon,-\epsilon)} f(z)dz| \leq \int_0^\pi \frac{(|\log(\epsilon)|+\pi)\epsilon}{1-\epsilon^2}d\theta$$

Fazendo $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$, obtemos,

$$2\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}dx + i\pi\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\pi^2 i$$

Igualando as partes reais obtemos,

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}dx = 0$$

Soma de séries

Consideremos a função

$$f(z) = \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}$$

que é analítica excepto para os polos simples $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ com resíduo $\frac{1}{n^2}$ e para o polo de ordem três na origem com resíduo $-\frac{\pi^2}{3}$. Consideremos o caminho γ_N que consiste da concatenação das arestas do quadrado S_N com vértices em $(\pm 1 \pm i)(N + \frac{1}{2})$ (ver figura 3.4.9). Note-se que os lados verticais não contêm polos de f.

Pelo teorema dos resíduos temos

$$\int_{\gamma_N} f(z)dz = 2\pi i\big(2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3}\big)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}|\int_{\gamma_N} f(z)dz| &\leq \sup_{z\in S_N}|\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}|l(\gamma_N) \\ &\leq \sup_{z\in S_N}|\cot(\pi z)|\frac{4(2N+1)\pi}{(N+\frac{1}{2})^2}\end{aligned}$$
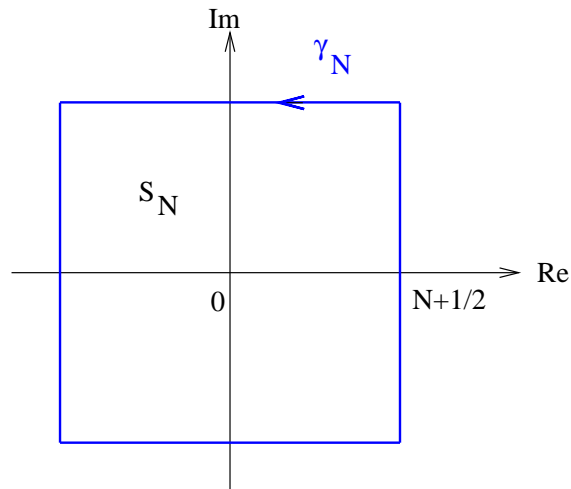
Figura 3.4.9:

Sobre as arestas horizontais $z = x \pm i(N + \frac{1}{2})$, temos

$$\begin{aligned}
|\cot(\pi z)| &= \left|\frac{e^{i\pi[x\pm i(N+\frac{1}{2})]} + e^{-i\pi[x\pm i(N+\frac{1}{2})]}}{e^{i\pi[x\pm i(N+\frac{1}{2})]} - e^{-i\pi[x\pm i(N+\frac{1}{2})]}}\right| \\
&\leq \frac{e^{\pi(N+\frac{1}{2})} + e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}}{e^{\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}} \\
&= \coth(N + \frac{1}{2})\pi \\
&\leq \coth(\frac{3\pi}{2})
\end{aligned}$$

porque a função $\coth(t)$ é decrescente para $t \geq 0$.

Sobre as arestas verticais $z = \pm(N + \frac{1}{2}) + iy$, temos

$$|\cot(\pi z)| = |\tan(i\pi y)| = |\tanh(\pi y)| \leq 1$$

Portanto, fazendo $N \to \infty$, obtemos

$$\left|\int_{\gamma_N} f(z)dz\right| \to 0$$

o que nos permite calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Este método pode ser aplicado a qualquer série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)$, em que ϕ é uma função racional, par e analítica excepto nos pontos $\pm 1, \pm 2, \ldots$ e para a qual existem

$M, R > 0$ tais que $|\phi(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$ desde que $|z| > R$. Integrando a função $f(z) = \phi(z)\pi\cot(\pi z)$ ao longo do caminho γ_N e aplicando o teorema dos resíduos, obtemos a soma pretendida. Note-se que a função f tem polos simples nos pontos $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ com resíduo $\phi(n)$.

Exemplos diversos

- Para calcular o integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)} dx$$
em que $(-1 < a < 1)$, consideremos a função
$$f(z) = a^{az} \operatorname{sech}(z)$$
que tem polos simples nos pontos $z = \frac{1}{2}(2n+1)\pi i$, $(n \in \mathbb{Z})$ e consideremos o caminho seguinte (ver figura 3.4.10)
$$\gamma = [-S, R] + [R, R + \pi i] + [R + \pi i, -S + \pi i] + [-S + \pi i, -S]$$
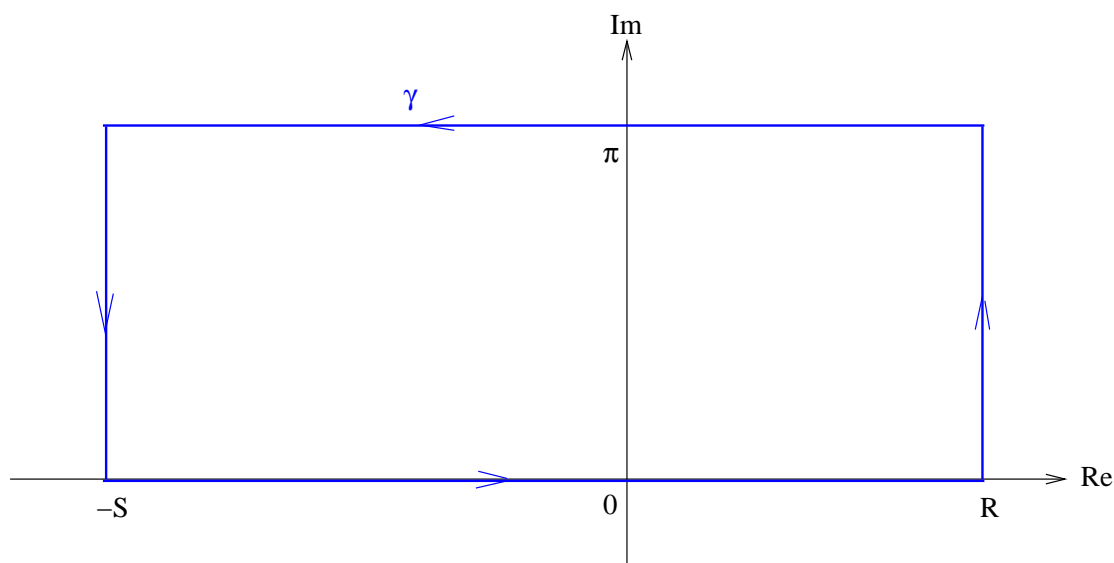
Figura 3.4.10:

Em $I(\gamma)$ a função f apresenta o polo $z = \frac{\pi i}{a}$ com resíduo dado por
$$\operatorname{res}(f, \frac{\pi i}{a}) = -ie^{\frac{a\pi i}{2}}$$

Portanto, pelo teorema dos resíduos temos,

$$\int_{-S}^{R} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx + \int_{0}^{\pi} \frac{ie^{a(R+iy)}}{\cosh(R+iy)}dy \quad + \quad \int_{R}^{-S} \frac{e^{a\pi i}e^{ax}}{\cosh(x+\pi i)}dx$$
$$+ \quad \int_{0}^{\pi} \frac{ie^{a(-S+iy)}}{\cosh(-S+iy)}dy = 2\pi e^{\frac{a\pi i}{2}}$$

Sejam I e J o segundo e o quarto integrais respectivamente. Então,

$$|I| \leq \int_{0}^{\pi} \frac{2e^{aR}}{|e^{(R+iy)} + e^{-(R+iy)}|}dy \leq \int_{0}^{\pi} \frac{2e^{aR}}{|e^{R} - e^{-R}|}dy$$

e sendo $a < 1$, fazendo $R \to \infty$ obtemos $I \to 0$.

$$|J| \leq \int_{0}^{\pi} \frac{2e^{-aS}}{|e^{-S} - e^{S}|}dy$$

e sendo $a > 1$, fazendo $S \to \infty$, obtemos $J \to 0$.

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh(x)}dx = \frac{2\pi e^{\frac{a\pi i}{2}}}{1+e^{a\pi i}} = \pi \sec(\frac{a\pi i}{2})$$

- Para calcular o integral impróprio

$$\int_{0}^{\infty} \cos(x^2)dx$$

consideremos a função $f(z) = e^{iz^2}$ e o caminho seguinte

$$\gamma = [0,R] + \gamma(R, Re^{\frac{i\pi}{4}}) + [Re^{\frac{i\pi}{4}}, 0]$$

como se mostra na figura 3.4.11.

Pelo teorema de Cauchy temos,

$$\int_{0}^{R} e^{ix^2}dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{i2t}}Rie^{it}dt + \int_{R}^{0} e^{i(re^{\frac{i\pi}{4}})^2}e^{\frac{i\pi}{4}}dr = 0$$

Usando a desigualdade

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \leq 1 \ , \qquad (0 < t \leq \frac{\pi}{2})$$
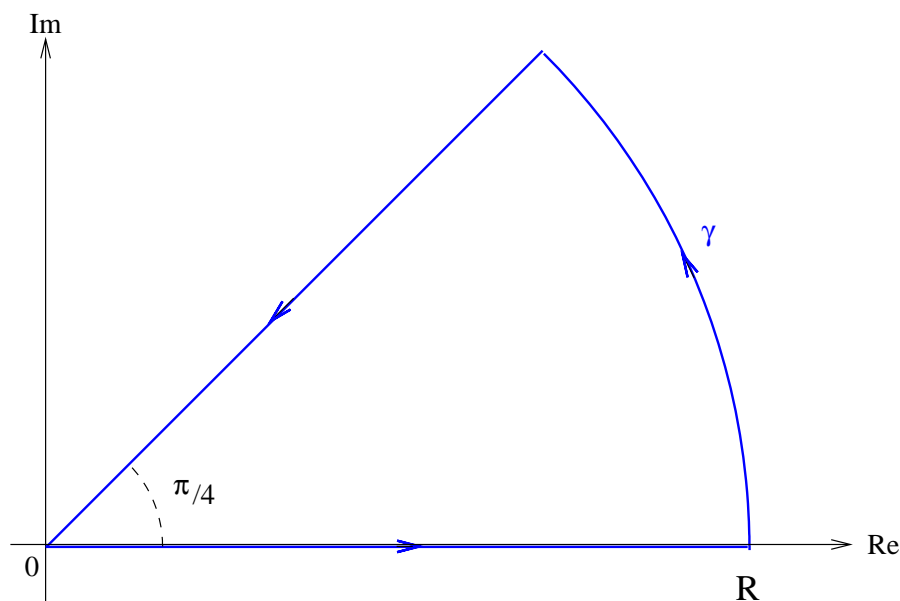
Figura 3.4.11:

podemos estimar o segundo integral

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{i2t}} Rie^{it}dt\right| &\leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\operatorname{sen}(2t)}dt\\ &\leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-4R^2t}{\pi}}dt\\ &\leq \frac{\pi(1-e^{-R^2})}{4R}\end{aligned}$$

Fazendo $R \to \infty$ e tendo em conta que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, obtemos

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}dr = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Igualando as partes reais,

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

- Para calcular o integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}dx\ ; \qquad (0 < a < 1)$$

consideremos as funções

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z^{-a}}{z+1}\,; \qquad |z|>0\,, -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2} \\ f_2(z) &= \frac{z^{-a}}{z+1}\,; \qquad |z|>0\,, \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

e os caminhos γ_1 e γ_2 como se mostram nas Figuras (3.4.12, 3.4.13) e em que $\epsilon < 1 < R$.
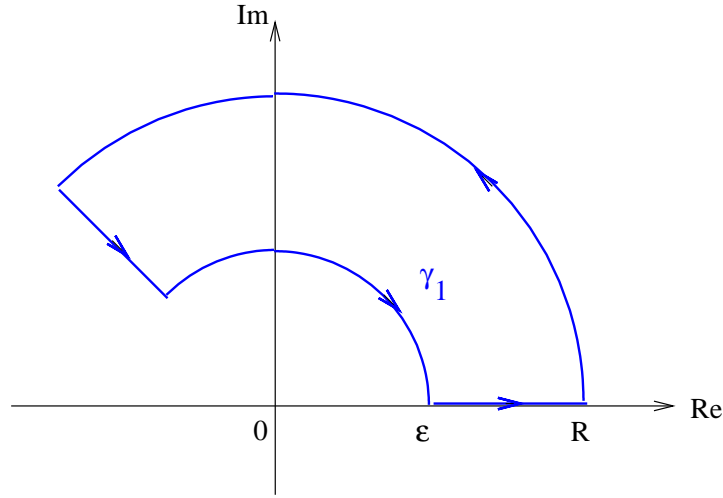
Figura 3.4.12:

Note-se que a função f_1 é analítica em $I(\gamma_1)$ e, portanto,

$$\int_{\gamma_1} f_1(z)dz = 0 \tag{3.4.10}$$

Por sua vez, a função f_2 apresenta um polo simples no ponto $z=-1$ em $I(\gamma_2)$. Por definição temos

$$f_2(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} = \frac{\exp\left[-a\,\mathrm{Log}\,|z| + i\arg z\right]}{z+1}$$

em que $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$.

O resíduo de f_2 em $z=-1$ é dado por

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f_2(z) = \lim_{z\to -1} z^{-a} = e^{-a\pi i}$$

e, portanto

$$\int_{\gamma_2} f_2(z)dz = 2\pi i\, e^{-a\pi i} \tag{3.4.11}$$
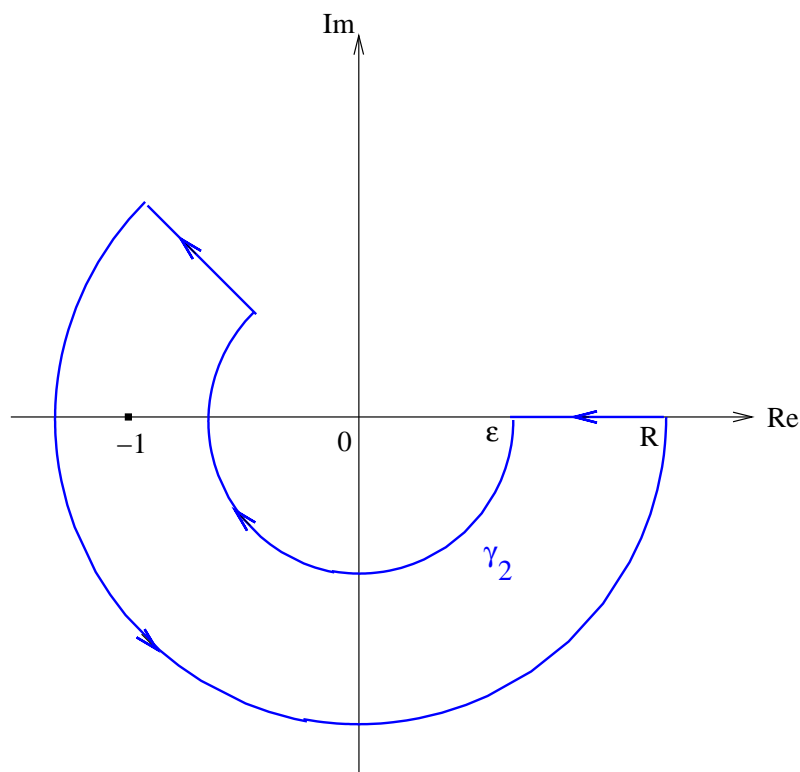
Figura 3.4.13:

Dado que $f_1(z) = f_2(z)$ sobre o segmento de recta no segundo quadrante temos,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f_1(z)dz \quad &+ \quad \int_{\gamma_2} f_2(z)dz = \int_{\epsilon}^{R} f_1(x)dx - \int_{\epsilon}^{R} f_2(x)dx \\ &+ \quad \int_{\Gamma_1} f_1(z)dz + \int_{\Gamma_2} f_2(z)dz + \int_{\gamma_{\epsilon 1}} f_1(z)dz + \int_{\gamma_{\epsilon 2}} f_2(z)dz \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

em que Γ_k é o arco de circunferência de raio R e $\gamma_{\epsilon k}$ é o arco de circunferência de raio ϵ que, como mostram as Figuras (3.4.12,3.4.13), fazem parte do caminho γ_k ; $(k = 1, 2)$.

Sobre Γ_k ; $(k = 1, 2)$ temos

$$|f_k(z)| = \left| \frac{z^{-a}}{z+1} \right| \leq \frac{R^{-a}}{R-1}$$

ou seja,

$$\left| \int_{\Gamma_k} f_k(z)dz \right| \leq \frac{R^{-a}}{R-1} 2\pi R$$

e, portanto

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_k} f_k(z)dz = 0 \qquad (k=1,2) \tag{3.4.13}$$

Sobre γ_k temos

$$|f_k(z)| = \left|\frac{z^{-a}}{z+1}\right| \le \frac{\epsilon^{-a}}{1-\epsilon}$$

ou seja,

$$\left|\int_{\gamma_k} f_k(z)dz\right| \le \frac{\epsilon^{-a}}{1-\epsilon}2\pi\epsilon$$

e, portanto

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_k} f_k(z)dz = 0 \qquad (k=1,2) \tag{3.4.14}$$

De (3.4.10), (3.4.11), (3.4.12), (3.4.13) e (3.4.14), obtemos

$$\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0}\left(\int_\epsilon^R f_1(x)dx - \int_\epsilon^R f_2(x)dx\right) = 2\pi i\, e^{-a\pi i}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^R f_1(x)dx - \int_\epsilon^R f_2(x)dx &= \int_\epsilon^R \frac{1}{x+1}[e^{-a\,\mathrm{Log}(x)} - e^{-a(\mathrm{Log}(x)+2\pi i)}]dx \\ &= \int_\epsilon^R \frac{x^{-a}}{x+1}(1-e^{-2\pi a i})dx\end{aligned}$$

que permite concluir

$$\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0}\int_\epsilon^R \frac{x^{-a}}{x+1}dx = \frac{2\pi i e^{-a\pi i}}{1-e^{-2a\pi i}}$$

e, portanto

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(a\pi)} \qquad (0<a<1)$$

3.5 Exercícios

1. Calcule os resíduos correspondentes aos polos da função $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z^3-1)}$

2. Calcule o resíduo em $z=0$ de cada uma das funções seguintes:

   a) $\mathrm{cosec}^2(z)$

   b) $\dfrac{\mathrm{cosec}(z^2)}{z^3}$

c) $z\cos(\frac{1}{z})$

3. Calcule o resíduo em $z = 1$ do ramo analítico da função

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1-z}$$

correspondente a

$$(2n-1)\pi < \arg(z) < (2n+1)\pi \ ; \quad (n \in \mathbb{Z})$$

4. Calcule o integral

$$\int_\gamma \frac{1}{z^3(z+4)} dz$$

para os dois casos seguintes:

i) $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$

ii) $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z+2| = 3\}$

5. Para $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ calcule os integrais:

i) $\displaystyle\int_\gamma \tan(z) dz$

ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\text{senh}(2z)} dz$

6. Calcule os integrais:

   a) $\int_{\gamma(0,8} \frac{1}{1+e^z} dz$

   b) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+8\cos^2(t)} dt$

   c) $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma(0,R} \frac{p(z)}{q(z)} dz$, em que p e q são polinómios de grau m e n, respectivamente, tais que $m < n-1$.

7. Para $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ calcule os integrais:

i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2} dz$

ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\text{cosec}(z)}{z} dz$

iii) $\displaystyle\int_\gamma z e^{\frac{1}{z}}$

8. Estabeleça as igualdades seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{6}$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\text{sen}(ax)}{x^4+4} = \frac{\pi}{2}e^{-a}\text{sen}(a)$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\text{sen}(t)}dt = \frac{2\pi}{3}$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos(t)}dt = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$; $\quad(-1 < a < 1)$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \text{sen}^{2n}(t)dt = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}$; $\quad(a > 1)$

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\pi}{4}$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

9. Calcule o valor principal de cada um dos integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x^2+4x+5}dx$

10. Calcule o integral

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2}dx$$

considerando a função

$$f(z) = \frac{1-e^{i2z}}{z^2}$$

e o caminho

$$\gamma_R(R,-R) + [-R,-\epsilon] + \gamma_\epsilon(-\epsilon,\epsilon) + [\epsilon, R]$$

11. Mostre que se tem

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

usando o teorema dos resíduos e o caminho

$$\gamma_R(R, Re^{i\frac{2\pi}{3}}) + [Re^{i\frac{2\pi}{3}}, 0] + [0, R]$$

12. Seja f uma função analítica excepto nos polos 1 e -1 de ordem dois com resíduos a e b, respectivamente. Além disso existem $M, R > 0$ tais que $|z^2 f(z)| \leq M$ para $|z| > R$. Prove que $a + b = 0$.

13. Prove que a equação $z^5 + 15z + 1 = 0$ tem precisamente quatro soluções no conjunto $\{z : \frac{3}{2} < |z| < 2\}$.

14. Prove que, para $n = 3, 4, 5, \ldots$, o polinómio $z^n + nZ - 1$ tem n zeros no interior do círculo de centro na origem e raio $1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

Bibliografia

[1] L. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw Hill, 3rd. ed., 1979.

[2] J. Bak and D.J. Newman. *Complex Analysis*. Springer Verlag, 2nd. ed., 1996.

[3] R.V. Churchill, J.W. Brown, and R.F. Verhey. *Complex Variables and Applications*. International Student Edition, 3rd. ed., 1974.

[4] T. Needham. *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press, 1997.

[5] H.A. Priestley. *Introduction to Complex Analysis*. Oxford Univ. Press, 1990.

[6] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw Hill, 3rd. ed., 1987.